

## LA DUALIDAD DE SCHUR

PAULO TIRAO

### CONTENIDOS

1. Representaciones de grupos finitos	181
1.1. Resultados fundamentales	183
2. Los grupos simétricos	183
2.1. Todas las representaciones irreducibles de $S_n$	185
2.2. La representación <i>regular</i>	187
3. $S_n$ y el producto tensorial $V \otimes \cdots \otimes V$ , $n$ -veces	189
4. La dualidad de Schur	192
4.1. Las representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m)$	192
4.2. La dualidad $S_n \longleftrightarrow \mathfrak{gl}(m)$	199

En estas notas están escritos los contenidos de un curso de tres clases, dictado en el VIII Congreso Dr. Antonio Monteiro, que presenta un resultado fundamental y muy acabado de la teoría de representaciones clásica: la dualidad de Schur entre las representaciones del grupo simétrico y las del grupo general lineal o su álgebra de Lie.

La dualidad de Schur es el objetivo principal del curso y el hilo conductor del mismo. Para ello es necesario introducir las representaciones de los grupos simétricos y del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(m)$ . Ambos son ejemplos centrales y muy relevantes de la teoría de representaciones de grupos finitos y de la teoría de representaciones de álgebras de Lie.

El curso está guiado por ejemplos concretos y muchos cálculos explícitos que sugieren los resultados generales. Hemos intentado mantener al mínimo la teoría necesaria, privilegiando la profundidad en los casos particulares tratados.

Estas notas no constituyen de ninguna manera una referencia para aprender de manera sistemática y rigurosa los temas que se tratan. Para poder aprovechar su contenido es necesario tener un manejo más o menos fluido de las nociones básicas del álgebra lineal, conocer el producto tensorial de espacios vectoriales, conocer la definición de grupo y en particular conocer los grupos de permutaciones.

Aprovechamos la oportunidad para agradecer y felicitar a los organizadores del VIII Congreso Dr. Antonio Monteiro por su trabajo, que redundó en el excelente encuentro que todos disfrutamos.

### 1. REPRESENTACIONES DE GRUPOS FINITOS

En estas notas, todos los espacios vectoriales que aparezcan serán complejos y de dimensión finita.

**Definición 1.1.** Una representación de un grupo finito  $G$  en un espacio vectorial  $V$ , es un homomorfismo  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  de  $G$  en el grupo de automorfismos de  $V$ . La dimensión de la representación  $\rho$  es la dimensión de  $V$ .

Un homomorfismo  $\phi$  entre dos representaciones  $(\rho, V)$  y  $(\mu, W)$  de  $G$ , es una transformación lineal  $\phi : V \rightarrow W$ , tal que

$$\phi \circ \rho(g) = \mu(g) \circ \phi, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Si además  $\phi$  es biyectiva,  $\phi$  es un isomorfismo.

**Ejemplos 1.2.**

1.  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  definida por  $\rho(g) = \text{Id}$ , para todo  $g \in G$ , es una representación. Si  $\dim V = 1$ ,  $\rho$  es la *representación trivial* de  $G$ .
2.  $\rho : \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \rightarrow GL(V)$ , con  $\dim V = 2n$ , definida por

$$\rho(1) = \text{Id}, \quad \rho(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

es una representación *fiel* de  $\mathbb{Z}_2$ .

3. Sea  $\alpha$  una raíz cúbica de la unidad y sea  $\rho : \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \rightarrow GL(V)$ , con  $\dim V = 4$ , definida por

$$\rho(0) = \text{Id}, \quad \rho(1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha(1-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \rho(2) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2-1 & 0 & 1 & \alpha^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cualquiera sea  $\alpha$  (raíz cúbica de la unidad),  $\rho$  es una representación de  $\mathbb{Z}_3$ . Si  $\alpha \neq 1$ ,  $\rho$  resulta fiel.

4. *La representación regular.* Dado  $G$ , sea  $V$  el espacio vectorial con base  $\{e_g : g \in G\}$ . La representación regular izquierda de  $G$ , es  $\rho$  definida por

$$\rho(h) \left( \sum_{g \in G} c_g e_g \right) = \sum_{g \in G} c_g e_{hg}.$$

**Definición 1.3.** Una subrepresentación de una representación  $(\rho, V)$  de  $G$  es un subespacio  $W$  de  $V$  invariante por  $\rho(G)$ .

Una representación  $(\rho, V)$  de  $G$  se dice *irreducible* si  $V$  no tiene subespacios propios distintos de 0 invariantes por  $G$ .

A partir de dos representaciones de un grupo  $G$  hay diversas maneras de construir nuevas representaciones de  $G$ .

**Definición 1.4.** Sean  $(\rho, V)$  y  $(\mu, W)$  dos representaciones de  $G$ .

La *suma directa* de ellas es  $\rho \oplus \mu : G \rightarrow GL(V \oplus W)$  definida por

$$(\rho \oplus \mu)(g) = \rho(g) \oplus \mu(g).$$

El *producto tensorial* de ellas es  $\rho \otimes \mu : G \rightarrow GL(V \otimes W)$  definida por

$$(\rho \otimes \mu)(g) = \rho(g) \otimes \mu(g),$$

donde  $(\rho(g) \otimes \mu(g))(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \mu(g)(w)$ .

**1.1. Resultados fundamentales.** Resumimos aquí dos resultados fundamentales de la teoría de representaciones de grupos finitos.

Por un lado, cualquier representación de un grupo finito se descompone como la suma directa de subrepresentaciones irreducibles y más aún, esta descomposición es única salvo isomorfismo. Luego el estudio de las representaciones de un grupo finito  $G$ , se reduce al estudio de las representaciones irreducibles de  $G$ .

Por otro lado, para cualquier grupo finito  $G$ , hay sólo un número finito de representaciones irreducibles de  $G$  no isomorfas.

**Proposición 1.5.** *Si  $W$  es una subrepresentación de una representación  $V$  de un grupo finito  $G$ , entonces existe un subespacio  $W'$  invariante tal que  $V = W \oplus W'$ .*

**Corolario 1.6.** *Toda representación de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles.*

*Nota.* Antes de continuar veamos un ejemplo que muestra que este corolario no es cierto si reemplazamos el grupo finito  $G$  por uno infinito, como por ejemplo el grupo aditivo de números reales  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow GL(V)$ , con  $\dim V = 2$ , definida por

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio  $W$  generado por el primer vector de la base es invariante por  $\rho(a)$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Si existiera un subespacio  $W'$  invariante y tal que  $V = W \oplus W'$ , entonces  $\rho(a)$  sería diagonalizable para todo  $a \in \mathbb{R}$ , lo cual es evidentemente falso.

**Proposición 1.7** (Lema de Schur). *Si  $V$  y  $W$  son representaciones irreducibles de un grupo finito  $G$  y  $\phi : V \rightarrow W$  es un homomorfismo, entonces*

1.  $\phi = 0$  ó  $\phi$  es un isomorfismo;
2. si  $V = W$ , entonces  $\phi = \lambda \text{Id}$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Corolario 1.8.** *Toda representación  $V$  de un grupo finito  $G$  se descompone como*

$$V = V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus m_k},$$

donde las  $V_i$  son representaciones irreducibles distintas. Más aún, la descomposición de  $V$  como suma directa de  $k$  sumandos es única, como también lo son las representaciones  $V_i$  y las multiplicidades  $m_i$ .

El segundo resultado fundamental de la teoría es el siguiente teorema, que se sigue de la teoría de caracteres. En estas notas no haremos ninguna referencia a este tópico.

**Teorema 1.9.** *El número de representaciones irreducibles de un grupo finito  $G$  es igual al número de clases de conjugación de  $G$ .*

## 2. LOS GRUPOS SIMÉTRICOS

Todo elemento de  $S_n$ , es decir toda permutación de  $n$  elementos, se escribe como producto de ciclos disjuntos. Hacemos notar que ciclos disjuntos conmutan.

Recordamos también que todo elemento de  $S_n$  se puede escribir como producto de transposiciones, es decir ciclos de longitud 2; en este caso las transposiciones no resultan disjuntas, en general.

**Ejemplo 2.1.** Si  $p : \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$  es la permutación

$$p(1) = 3, \quad p(2) = 5, \quad p(3) = 1, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 6, \quad p(6) = 2,$$

anotamos

$$p = (13)(256).$$

No es difícil ver que un elemento  $\sigma \in S_n$  y cualquier conjugado  $\rho^{-1}\sigma\rho$  de  $\sigma$ , son productos de igual número de ciclos disjuntos de las mismas longitudes. Luego, las clases de conjugación de  $S_n$  están parametrizadas por las particiones de  $n$ .

**Ejemplo 2.2.**  $S_4$  tiene 24 elementos. Las particiones de 4 son:

$$[4], \quad [3, 1], \quad [2, 2], \quad [2, 1, 1], \quad [1, 1, 1, 1]$$

y las clases de conjugación de  $S_4$  son:

[4]	[3,1]	[2,2]	[2,1,1]	[1,1,1,1]
(1234)	(123)	(12)(34)	(12)	(1)
(1243)	(124)	(13)(24)	(13)	
(1324)	(132)	(14)(23)	(14)	
(1342)	(134)		(23)	
(1423)	(142)		(24)	
(1432)	(143)		(34)	
	(234)			
	(243)			

Representaremos a la partición  $[n_1, n_2, \dots, n_k]$  de  $n$  por un diagrama de Young, esto es un arreglo gráfico de  $n$  cuadritos con  $n_i$  cuadritos en la  $i$ -ésima fila. Notar que este diagrama tiene  $k$  filas y un total de  $n$  cuadritos.

**Ejemplo 2.3.** En  $S_8$  las clases de conjugación están parametrizadas por los diagramas de Young de 8 cuadritos; entre ellos está por ejemplo el siguiente.

$$[3, 2, 2, 1] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

En virtud del Teorema 1.9 las representaciones irreducibles de  $S_n$  se pueden parametrizar por los diagramas de Young de  $n$  cuadritos. Así, por ejemplo, las representaciones irreducibles de  $S_3$  son tres y están parametrizadas por:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} .$$

Todo grupo simétrico tiene dos representaciones irreducibles de dimensión 1. La representación trivial y la representación signo,  $sg$ , que en una permutación  $\sigma$  es la multiplicación por el signo de  $\sigma$ . Recordamos que el signo de una permutación es igual a  $(-1)^t$ , si  $\sigma$  es el producto de  $t$  transposiciones.

Otra representación irreducible que tienen todos los grupos simétricos es la llamada representación *estándar*. El grupo simétrico  $S_n$  actúa en  $\mathbb{C}^n$  permutando las coordenadas, sin embargo esta representación no es irreducible, pues el subespacio uni-dimensional generado por  $(1, 1, \dots, 1)$  es estable. Luego podemos descomponer a  $\mathbb{C}^n$  como suma de dos subespacios invariantes por la acción de  $S_n$ . En efecto,

$$\mathbb{C}^n = \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle \oplus \langle \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0\} \rangle,$$

con ambos sumandos invariantes por  $S_n$ . Resulta que  $V = \langle \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0\} \rangle$  es siempre irreducible. Esta representación irreducible, de dimensión  $n - 1$ , es la representación estándar de  $S_n$ .

Notar que en el caso de  $S_2$ , y sólo en este caso, la representación estándar es la representación signo.

**Ejemplo 2.4.** Veamos cómo es la representación estándar  $\rho$  de  $S_3$ . Según la definimos, los elementos de  $S_3$  actúan en  $V = \langle \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\} \rangle$  permutando las tres coordenadas de los vectores en  $V$ . A continuación escribimos las matrices  $2 \times 2$  que corresponden a cada elemento de  $S_3$ .

$\sigma \in S_3 \mapsto \rho(\sigma)$	$\sigma \in S_3 \mapsto \rho(\sigma)$
$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$(13) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$(23) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$(123) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(132) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

**2.1. Todas las representaciones irreducibles de  $S_n$ .** Sabemos que las representaciones irreducibles de  $S_n$  son tantas como las clases de conjugación de  $S_n$ ; de hecho esto es cierto para cualquier grupo finito. Sin embargo no es claro cómo hacer corresponder a cada clase de conjugación de un grupo finito una representación irreducible.

En el caso de los grupos simétricos sí hay una manera de construir las representaciones irreducibles a partir de las clases de conjugación, o equivalentemente a partir de los diagramas de Young.

Construiremos estas representaciones dentro del álgebra del grupo  $S_n$ ,  $\mathbb{C}[S_n]$ . Recordamos que

$$\mathbb{C}[S_n] = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma e_\sigma : c_\sigma \in \mathbb{C} \right\},$$

donde  $e_\sigma e_\tau = e_{\sigma\tau}$ .

Dado un diagrama de Young de  $n$  cuadrillos, ubicamos los números del 1 al  $n$  como muestra el siguiente ejemplo.

$$D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline 8 & & \\ \hline \end{array}.$$

Luego consideramos los siguientes dos subconjuntos:

$$P = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ preserva las filas de } D\},$$

$$Q = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ preserva las columnas de } D\}$$

y los siguientes dos elementos de  $\mathbb{C}[S_n]$ :

$$a_D = \sum_{\sigma \in P} e_\sigma \quad \text{y} \quad b_D = \sum_{\sigma \in Q} \text{sg}(\sigma) e_\sigma.$$

Finalmente consideramos el *simetrizador de Young*

$$c_D = a_D b_D \in \mathbb{C}[S_n].$$

**Teorema 2.5.** *La imagen  $V_D$  de la multiplicación a derecha por  $c_D$  en  $\mathbb{C}[S_n]$ , es una representación irreducible de  $S_n$ . Toda representación irreducible de  $S_n$  se puede obtener así para un único diagrama  $D$ .*

**Ejemplo 2.6.** En el caso de  $S_3$  tenemos que considerar tres diagramas.

1.  $D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ . Para este diagrama,  $a_D = \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma$  y  $b_D = 1$ , luego  $c_D = \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma$ . Entonces resulta que

$$V_D = \left\langle \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma \right\rangle,$$

y la multiplicación a izquierda es trivial, pues  $e_\tau \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma = \sum_{\sigma \in S_3} e_\sigma$ , para todo  $\tau \in S_3$ . Es decir,  $D$  se corresponde con la representación trivial.

2.  $D = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ . Para este diagrama,  $a_D = 1$  y  $b_D = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sg}(\sigma) e_\sigma$ , luego  $c_D = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sg}(\sigma) e_\sigma$ .

Entonces resulta que

$$V_D = \left\langle \sum_{\sigma \in S_3} \text{sg}(\sigma) e_\sigma \right\rangle,$$

y la multiplicación a izquierda por  $e_\tau$  es la multiplicación por  $\text{sg}(\tau)$ . Es decir,  $D$  se corresponde con la representación signo.

3.  $D = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ . Para este diagrama,  $a_D = 1 + (12)$  y  $b_D = 1 - (13)$ , luego  $c_D = (1 + (12))(1 - (13)) = 1 + (12) - (13) - (132)$ .

No es difícil ver que en este caso

$$V_D = \langle \{c_D, (13)c_D\} \rangle.$$

Siendo la única representación irreducible de dimensión 2, debe ser la estándar. De todos modos verifiquemos que así es. Recordemos la descripción en el Ejemplo 2.4.

Dado que  $S_3$  está generado por las transposiciones  $\{(12), (13), (23)\}$ , basta calcular la acción de éstas en la base de  $V_D$  dada. Llamemos  $e_1 = c_D = 1 + (12) - (13) - (132)$  y  $e_2 = (13)c_D = -1 + (13) - (23) + (123)$ . Comencemos calculando:

$$\begin{aligned} (12)e_1 &= (12) + 1 - (132) - (13) = e_1 \text{ y } (12)e_2 = -(12) + (132) - (123) + (23) = -e_1 - e_2 \\ (13)e_1 &= (13) + (123) - 1 - (23) = e_2 \text{ y } (13)e_2 = -(13) + 1 - (132) + (12) = e_1 \\ (23)e_1 &= (23) + (132) - (123) - (12) = -e_1 - e_2 \text{ y } (23)e_2 = -(23) + (123) - 1 + (13) = e_2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices no lucen como las del Ejemplo 2.4. Sin embargo deben ser representaciones isomorfas, luego debemos encontrar un cambio de base  $P$  que muestre esto. Consideremos el cambio de base

$$e_1 \mapsto e_1 + 2e_2, \quad e_2 \mapsto -e_1 + e_2.$$

Tenemos que  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y su inversa es  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

Ahora no es difícil verificar que, en efecto, esta representación es isomorfa a la del Ejemplo 2.4.

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2.2. La representación regular.** Estudiemos en particular la representación regular de  $S_3$  (ver el Ejemplo 1.2). Tomemos como base ordenada de  $\mathbb{C}[S_3]$  el conjunto  $\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$  y escribamos, para cada elemento de  $S_3$ , la matriz de la multiplicación a izquierda en esta base.

$$\begin{array}{l}
 (1) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (23) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 (13) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (132) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Esta representación no es irreducible por muchas razones. En primer lugar,  $S_3$  no tiene representaciones irreducibles de dimensión 6. Luego por el Corolario 1.6 se descompone como suma de representaciones irreducibles. ¿Podremos descomponerla efectivamente como suma de irreducibles? ¿Podremos al menos deducir qué sumandos aparecen y cuántas veces cada uno?

Para descomponerla debemos hallar una matriz  $P$  de cambio de base de manera tal que al conjugar estas 6 matrices de más arriba resulten otras 6 en bloques, donde las restricciones de todas las matrices a estos bloques sean alguna de las representaciones irreducibles de  $S_3$ .

Como las trazas de una matriz y de cualquier conjugada a ella son las mismas, mirar las trazas puede ayudarnos. En la siguiente tabla mostramos las trazas para todas las representaciones irreducibles y para la regular.

	1	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
trivial	1	1	1	1	1	1
signo	1	-1	-1	-1	1	1
estándar	2	0	0	0	-1	-1
regular	6	0	0	0	0	0

Ahora si la representación regular se descompone como

$$\text{regular} = a \text{ trivial} + b \text{ signo} + c \text{ estándar},$$

entonces las trazas de las matrices correspondientes para todos los elementos de  $S_3$  tendrán que satisfacer una identidad análoga. Es decir,

$$a + b + 2c = 6, \quad a - b + 0c = 0, \quad a + b - c = 0.$$

Pero éste es un sistema lineal de ecuaciones cuya única solución es

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 2.$$

Es decir, la representación regular de  $S_3$  es suma de una copia de la representación trivial, una copia de la representación signo y dos copias de la representación estándar.

El siguiente teorema contiene este resultado que acabamos de probar y mucho más. Muestra cómo se descompone la representación regular de cualquier grupo finito.

**Teorema 2.7.** *La representación regular de cualquier grupo finito  $G$  se descompone como suma de todas las representaciones irreducibles de  $G$ , donde cada una aparece tantas veces como su dimensión.*

Queda como ejercicio muy instructivo, el identificar cada sumando irreducible en el caso de  $S_3$  que describimos.

3.  $S_n$  Y EL PRODUCTO TENSORIAL  $V \otimes \cdots \otimes V$ ,  $n$ -VECES

A partir de ahora nos concentraremos en estudiar la representación

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_n$$

de  $S_n$ . En este espacio actúa el grupo simétrico  $S_n$ , permutando las coordenadas.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $V$  de dimensión 2 y sea  $\{e, f\}$  una base de  $V$ . Consideremos el producto tensorial  $V \otimes V$  y  $S_2$  permutando sus coordenadas.

Algunos elementos de  $V \otimes V$  permanecen fijos bajo la acción de (12) y otros cambian de signo. Si escribimos

$$V \otimes V = \langle e \otimes e \rangle \oplus \langle f \otimes f \rangle \oplus \langle e \otimes f + f \otimes e \rangle \oplus \langle e \otimes f - f \otimes e \rangle,$$

vemos que todos los sumandos son preservados por (12) y luego por todo  $S_2$ . Siendo los sumandos de dimensión 1, resultan todos irreducibles. Más aún, la acción en los tres primeros es trivial y en el cuarto (12) actúa multiplicando por  $-1$ , es decir el último sumando es la representación signo de  $S_2$ .

En términos de diagramas de Young, lo que hemos visto se escribe

$$V \otimes V = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

**Ejemplo 3.2.** Sea ahora  $V$  de dimensión 3 y sea  $\{e, f, g\}$  una base de  $V$ . Consideremos el producto tensorial  $V \otimes V$  y  $S_2$  permutando sus coordenadas.

Si escribimos

$$V \otimes V = \langle \{e \otimes e, f \otimes f, g \otimes g, e \otimes f + f \otimes e, e \otimes g + g \otimes e, f \otimes g + g \otimes f\} \rangle \oplus \langle \{e \otimes f - f \otimes e, e \otimes g - g \otimes e, f \otimes g - g \otimes f\} \rangle,$$

se sigue que

$$V \otimes V = 6 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

**Ejemplo 3.3.** Consideremos nuevamente  $V$  de dimensión 2, sea  $\{e, f\}$  una base de  $V$  y consideremos el producto tensorial  $V \otimes V \otimes V$  y  $S_3$  permutando sus coordenadas.

Escribiendo

$$\begin{aligned}
 V \otimes V \otimes V = & \langle \{e \otimes e \otimes e, f \otimes f \otimes f, e \otimes e \otimes f + e \otimes f \otimes e + f \otimes e \otimes e, e \otimes f \otimes f + f \otimes e \otimes f + f \otimes f \otimes e\} \rangle \\
 & \oplus \langle \{f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e, f \otimes e \otimes e - e \otimes e \otimes f\} \rangle \\
 & \oplus \langle \{e \otimes f \otimes f - f \otimes e \otimes f, e \otimes f \otimes f - f \otimes f \otimes e\} \rangle
 \end{aligned}$$

es evidente que la representación trivial de  $S_3$  aparece cuatro veces. Ahora, aunque no tan evidente, los dos sumandos restantes son la representación estándar de  $S_3$ . Veamos esto calculando. Llamemos  $E = f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e$  y  $F = f \otimes e \otimes e - e \otimes e \otimes f$ . Luego

$$\begin{aligned}
 (12)E &= e \otimes f \otimes e - f \otimes e \otimes e = -E, & (12)F &= e \otimes f \otimes e - e \otimes e \otimes f = -E + F, \\
 (13)E &= e \otimes e \otimes f - e \otimes f \otimes e = E - F, & (13)F &= e \otimes e \otimes f - f \otimes e \otimes e = -F, \\
 (23)E &= f \otimes e \otimes e - e \otimes e \otimes f = F, & (23)F &= f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e = E.
 \end{aligned}$$

Es decir, estas tres transposiciones actúan como las siguientes transformaciones lineales del espacio  $\langle \{f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e, f \otimes e \otimes e - e \otimes e \otimes f\} \rangle$ , de dimensión 2.

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basta comparar con el Ejemplo 2.4 para confirmar que en efecto ésta es la representación estándar. Procediendo de la misma manera se ve que el tercer sumando es también la representación estándar.

Como conclusión podemos escribir entonces

$$V \otimes V \otimes V = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Hacemos notar que en este caso no han aparecido todas las representaciones irreducibles de  $S_3$ . En este caso falta la representación signo.

**Ejemplo 3.4.** Veamos un ejemplo más. En este caso supongamos que  $V$  es de dimensión 3 y consideremos, como antes, el producto tensorial  $V \otimes V \otimes V$ . Este espacio tiene ahora dimensión 27. Trabajando como en los casos anteriores es posible descomponer explícitamente este espacio y concluir que

$$V \otimes V \otimes V = 10 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 8 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Notemos que las dimensiones se corresponden correctamente, pues  $27 = 10 \times 1 + 8 \times 2 + 1 \times 1$ .

Juntemos en una tabla todo lo visto hasta ahora.

dim V	$V \otimes V$	$V \otimes V \otimes V$
2	$3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$4 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
3	$6 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$10 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 8 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$

El desafío ahora es entender estos resultados, es decir poder predecir las multiplicidades que acompañan a cada diagrama cualquiera sea la dimensión de  $V$  y cualquiera sea el número de factores del producto tensorial.

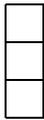
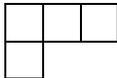
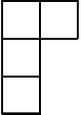
Para estimular a los curiosos agregamos más casos a esta tabla.

**Tabla 3.5.** Descomposición del producto tensorial  $V \otimes \dots \otimes V$  bajo la acción del grupo simétrico.

dim V	$V \otimes V$	$V \otimes V \otimes V$	$V \otimes V \otimes V \otimes V$
2	$3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$4 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$5 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
3	$6 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$10 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 8 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$15 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 15 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 6 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
4	$10 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 6 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$20 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 20 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 4 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$35 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 45 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 20 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 15 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
5	$15 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 10 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$35 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 40 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 10 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$70 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 105 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 50 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 45 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 5 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$

Acompañamos esta tabla con la siguiente, que muestra las dimensiones de todas las representaciones irreducibles de varios grupos simétricos. Con esta información se puede

chequear que por lo menos las dimensiones de las descomposiciones de esta tabla son correctas.

	Representaciones irreducibles				
$S_2$					
dim	1	1			
$S_3$					
dim	1	2	1		
$S_4$					
dim	1	3	2	3	1

#### 4. LA DUALIDAD DE SCHUR

Para entender lo que queremos, introducimos un nuevo objeto, el álgebra de Lie de todas las matrices cuadradas, que también actúa en el producto tensorial  $V \otimes \cdots \otimes V$ . El estudio de las representaciones de este objeto es la herramienta fundamental que nos permitirá comprender mejor lo que queremos.

La dualidad de Schur explica cómo están combinadas las representaciones del grupo simétrico y las del álgebra de Lie de todas las matrices en la descomposición de  $V \otimes \cdots \otimes V$ .

**4.1. Las representaciones del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(m)$ .** Consideremos el álgebra de Lie de todas las matrices complejas  $m \times m$ ,  $\mathfrak{gl}(m)$ . Esto es el espacio vectorial de matrices cuadradas con el corchete de Lie de matrices:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Podemos pensar al corchete como un nuevo producto de matrices. Este es anti-conmutativo y no es difícil convencerse de que no es asociativo. En cambio satisface la *identidad de Jacobi*

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

cualesquiera sean las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**Definición 4.1.** Una representación del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(m)$  en un espacio vectorial  $W$  es una transformación lineal  $\rho : \mathfrak{gl}(m) \rightarrow \text{End}(W)$  tal que

$$\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)] = \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A).$$

Las representaciones de  $\mathfrak{gl}(m)$  de dimensión finita comparten una propiedad fundamental con las representaciones de los grupos finitos.

**Proposición 4.2.** *Toda representación de  $\mathfrak{gl}(m)$  (de dimensión finita) se descompone como suma de representaciones irreducibles. Más aún, las representaciones irreducibles que aparecen y sus multiplicidades son únicas.*

Las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{gl}(m)$  están clasificadas por el Teorema de Peso Máximo. No nos detendremos en enunciar y probar este resultado fundamental, pues no disponemos del tiempo necesario. Lo que sí haremos es mostrarlo en acción en el caso que nos interesa, el producto tensorial

$$W = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_n.$$

En primer lugar, si  $\dim V = m$ , el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(m)$  actúa en este espacio definiendo una representación  $\rho$  en  $W$ . Dada una matriz  $A \in \mathfrak{gl}(V)$ ,  $\rho(A)$  es la transformación lineal en  $\text{End}(W)$  definida por

$$\rho(A)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = Av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes Av_2 \otimes \cdots \otimes v_n + \cdots + v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes Av_n.$$

Introducimos ahora una noción fundamental que necesitamos para continuar, la de *vector peso*. Para esto debemos considerar las matrices diagonales  $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ , donde  $H_i$  es la matriz diagonal con todos 0, salvo un 1 en la posición  $i$ . El espacio de todas las matrices diagonales es  $\mathfrak{h}$ .

**Definición 4.3.** Un vector  $\bar{v} \in W$  es un vector peso si  $H_i \cdot \bar{v} = \lambda_i \bar{v}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . En este caso  $\bar{v}$  es un vector peso, de peso  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

Todos los vectores de la base canónica del producto tensorial son vectores peso. Primero, si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es base de  $V$ , entonces

$$H_i(e_j) = \begin{cases} e_j, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} H_i \cdot (e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}) &= \sum_k e_{j_1} \otimes \cdots \otimes H_i(e_{j_k}) \otimes \cdots \otimes e_{j_m} \\ &= \lambda_i(e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_m}), \end{aligned}$$

donde  $\lambda_i$  es la cantidad de veces que aparece el índice  $i$  entre los  $j$ 's.

**Ejemplo 4.4.** Supongamos que  $\dim V = 5$  y  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  es una base de  $V$ . Entonces

$$H_1 \cdot (e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5) = 2(e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5);$$

$$H_2 \cdot (e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5) = 0;$$

$$H_3 \cdot (e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5) = e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5;$$

$$H_4 \cdot (e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5) = 0;$$

$$H_5 \cdot (e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5) = e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5.$$

Luego  $e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_5$  es un vector peso, de peso  $(2, 0, 1, 0, 1)$ .

Los pesos son entonces  $m$ -uplas de enteros no negativos<sup>1</sup>. Diremos que un peso  $\lambda$  es mayor que otro  $\mu$ , si  $\lambda \succ \mu$  en el orden lexicográfico. Así por ejemplo,  $(1, 0, 0) \succ (0, 1, 0)$  y  $(2, 2, 0, 1) \succ (2, 1, 1, 1)$ .

**Definición 4.5.** Un peso  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  es dominante si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ .

¡Resulta entonces que los pesos dominantes se pueden representar con diagramas de Young! Al peso  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  le asociamos el diagrama de Young con  $\lambda_1$  cuadritos en la primera fila,  $\lambda_2$  cuadritos en la segunda fila y así sucesivamente para terminar con  $\lambda_m$  cuadritos en la última fila. Este diagrama tiene un total de  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$  cuadritos y tiene  $k$  filas si  $\lambda_k \neq 0$  y  $\lambda_{k+1} = 0$ .

**Ejemplo 4.6.** Debemos hacer notar que si no especificamos  $m$ , un mismo diagrama puede corresponderse con pesos distintos. En cambio si  $m$  está previamente fijado no hay ambigüedad alguna.

$$m = 4 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \sim (3, 2, 2, 1); \quad m = 6 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \sim (3, 2, 2, 1, 0, 0).$$

Analicemos el caso  $n = 1$ , es decir donde simplemente  $W = V$ . En este caso una matriz  $A$  actúa en un  $v$  evaluando  $Av$ , es decir  $A$  actúa como la transformación lineal que representa. Esta representación es la representación estándar de  $\mathfrak{gl}(V)$ . (No confundir a ésta, con la representación estándar de  $S_n$ .) Es claramente irreducible pues dado un vector cualquiera  $v \neq 0$  y dado otro cualquiera  $w$  siempre existe una matriz  $A$  tal que  $Av = w$ . Así la representación estándar de  $\mathfrak{gl}(V)$  es irreducible y tiene dimensión  $m = \dim V$ .

Antes de continuar, mostramos algunos aspectos muy relevantes del caso general y de una teoría mucho más amplia.

Las matrices diagonales de  $\mathfrak{gl}(m)$  juegan un rol importante en la definición de vectores peso y del peso de estos vectores. Ahora mostramos que las matrices triangulares superiores (estrictas)  $T^+(m)$  y las matrices triangulares inferiores (estrictas)  $T^-(m)$  también tienen roles importantes. Es claro que

$$\mathfrak{gl}(m) = T^-(m) \oplus \mathfrak{h} \oplus T^+(m).$$

Ésta es la descomposición triangular de  $\mathfrak{gl}(m)$ .

<sup>1</sup>Esto no es cierto para cualquier representación. Sí es cierto para las llamadas tensoriales.

Ya hemos elegido una base para  $\mathfrak{h}$ , la canónica; elijamos entonces para  $T^-(m)$  y  $T^+(m)$  las bases canónicas respectivamente, es decir, las formadas por las matrices  $E_{ij}$ , aquellas con una única entrada no nula e igual a 1 en la posición  $ij$ . Si  $i > j$ ,  $E_{ij} \in T^-(m)$  y si  $i < j$ ,  $E_{ij} \in T^+(m)$ .

Veamos ahora, en algunos ejemplos, qué efecto tienen las matrices  $E_{ij}$  en los vectores peso de  $V \otimes \cdots \otimes V$ . Antes cabe recordar que

$$E_{ij}e_k = \begin{cases} e_i, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

**Ejemplo 4.7.** Supongamos que  $\dim V = 4$  y sea  $v = e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2$ . Claramente  $v$  es un vector peso, de peso  $(0, 2, 1, 1)$ . Ahora calculemos.

$$\begin{aligned} E_{12}v &= e_1 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 e_1, & E_{23}v &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_4 \otimes e_2, \\ E_{13}v &= e_2 \otimes e_1 \otimes e_4 \otimes e_2, & E_{34}v &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_3 \otimes e_2, \\ E_{14}v &= e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Las matrices  $E_{ij}$ , con  $i < j$ , aplicadas a  $v$  han producido vectores peso de diferente peso. Anotemos cómo han cambiado los pesos.

$$\begin{aligned} (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{12}} (1, 1, 1, 1) & (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{23}} (0, 3, 0, 1) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{13}} (1, 2, 0, 1) & (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{34}} (0, 2, 2, 0) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{14}} (1, 2, 1, 0) \end{aligned}$$

Sigamos calculando.

$$\begin{aligned} E_{21}v &= 0, & E_{32}v &= e_3 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 + \otimes e_3, \\ E_{31}v &= 0, & E_{43}v &= e_2 \otimes e_4 \otimes e_4 \otimes e_2, \\ E_{41}v &= 0. \end{aligned}$$

Las matrices  $E_{ij}$ , con  $i > j$ , aplicadas a  $v$  han producido vectores peso de diferente peso. Anotemos cómo han cambiado los pesos.

$$\begin{aligned} (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{21}} (0, 0, 0, 0) & (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{32}} (0, 1, 2, 1) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{31}} (0, 0, 0, 0) & (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{43}} (0, 2, 0, 2) \\ (0, 2, 1, 1) &\xrightarrow{E_{41}} (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Las matrices  $E_{ij}$  con  $i < j$  han hecho crecer el peso, mientras que las matrices  $E_{ij}$  con  $i > j$ , lo han hecho decrecer.

Los operadores  $E_{ij}$  con  $i < j$ , se llaman *operadores de crecimiento* y los operadores  $E_{ij}$  con  $i > j$ , se llaman *operadores de decrecimiento*.

Usando estos operadores analicemos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 4.8.** Sea  $W = V$ , con  $\dim V = m$ , bajo la acción de  $\mathfrak{gl}(m)$ . Los elementos de la base, como ya dijimos, son todos vectores peso; más aún  $e_i$  es de peso  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  con el 1 en la  $i$ -ésima posición. El de mayor peso es entonces  $e_1$ , cuyo peso es dominante.

Además, es anulado por todos los operadores de crecimiento y resulta que  $V = \langle \{E_{ij}e_1 : i > j\} \rangle$ .

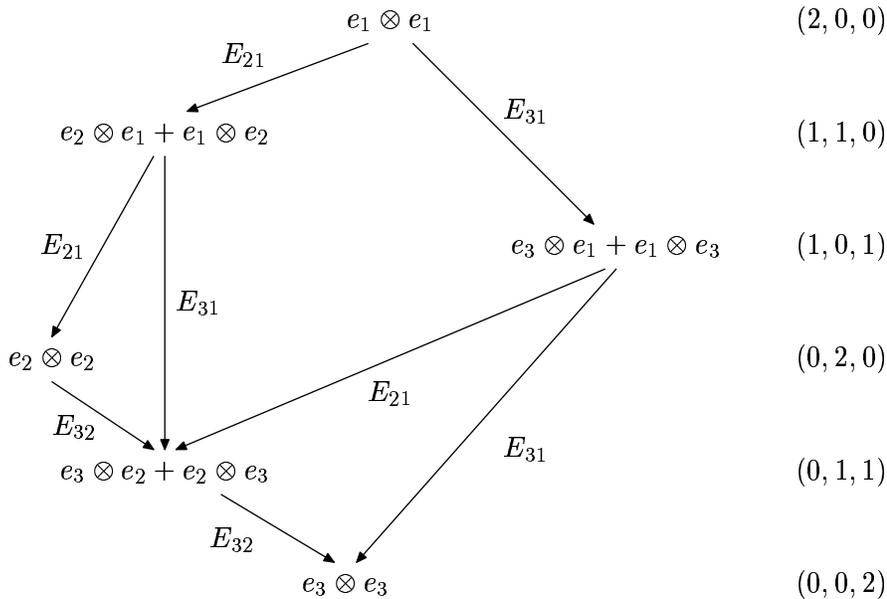
Es decir,  $e_1$  es un vector de peso dominante, anulado por los operadores de crecimiento, tal que junto con los operadores de decrecimiento generan toda la representación.

**Ejemplo 4.9.** Sea ahora  $W = V \otimes V$ , con  $\dim V = 3$ , bajo la acción de  $\mathfrak{gl}(3)$ . Escribamos algunos vectores peso, de peso dominante, y veamos cómo actúan los operadores de crecimiento y de decrecimiento en ellos. Por ejemplo

$$v_1 = e_1 \otimes e_1 \quad \text{y} \quad v_2 = e_1 \otimes e_2$$

son vectores peso de pesos  $(2, 0, 0)$  y  $(1, 1, 0)$  respectivamente.

El vector  $v_1$  es anulado por todos los operadores de crecimiento, mientras que  $v_2$  no. De hecho  $E_{12}v_2 = v_1$ . Veamos qué obtenemos, a partir de  $v_1$ , aplicando repetidamente los operadores de decrecimiento.



El subespacio generado por los 6 vectores peso que aparecen en el diagrama es una representación irreducible de  $\mathfrak{gl}(3)$ . El vector  $v_1$  se llama *vector de peso máximo* de esta representación, y resulta único salvo escalares. Esta representación es exactamente  $\text{Sym}^2(3)$ , la componente de grado 2 del álgebra simétrica en tres letras, o dicho de otra manera el espacio de polinomios homogéneos de grado 2 en tres variables.

Como esta representación tiene dimensión 6 y  $\dim V \otimes V = 9$ , luego  $V \otimes V$  no es irreducible. Busquemos lo que falta. El vector  $v_2$  es vector peso de peso dominante pero no es anulado por todos los operadores de crecimiento. Además, si hiciéramos lo mismo que hicimos con  $v_1$  encontraríamos por ejemplo que  $E_{21}v_2 = e_2 \otimes e_2$ , que ya está en la representación anterior.

Hagamos entonces otra cosa. Busquemos un vector peso, de peso  $(1, 1, 0)$  pero que sea anulado por todos los operadores de crecimiento. Podemos tomar

$$v_3 = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

y hacer lo mismo que hicimos con  $v_1$ . Los vectores no nulos que se obtienen son

$$E_{32}v_3 = e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 \quad \text{y} \quad E_{31}v_3 = e_3 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3.$$

El subespacio generado por los 3 vectores peso que aparecen es otra representación irreducible de  $\mathfrak{gl}(3)$ , de dimensión 3. Es exactamente  $\text{Alt}^2(3)$ , la componente de grado 2 del álgebra alternante en tres letras.

Como  $V \otimes V = \text{Sym}^2(3) \oplus \text{Alt}^2(3)$ , hemos terminado. Cada una de estas representaciones irreducibles están generadas por sus vectores de peso máximo cuyos pesos son dominantes, luego podemos asociarles a cada una un diagrama de Young. Así podemos ahora escribir

$$V \otimes V = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

**Ejemplo 4.10.** De manera análoga podríamos considerar el caso  $W = V \otimes V \otimes V$ . Las herramientas que ya presentamos y el método que seguimos nos permiten, con algo más de trabajo, concluir que

$$V \otimes V \otimes V = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

si  $\dim V = 2$  y que si  $\dim V = 3$ , entonces

$$V \otimes V \otimes V = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Como hicimos para el grupo simétrico (ver la Tabla 3.5) mostramos a continuación algunos ejemplos más con la descomposición de  $V \otimes \cdots \otimes V$  bajo la acción del  $\mathfrak{gl}(m)$ .

**Tabla 4.11.** Descomposición del producto tensorial  $V \otimes \cdots \otimes V$  bajo la acción de  $\mathfrak{gl}(m)$ .

$\dim V$	$V \otimes V$	$V \otimes V \otimes V$	$V \otimes V \otimes V \otimes V$
2	$1 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
3	$1 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 0 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
4	$1 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$
5	$1 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	$1 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1 \times \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$

La siguiente tabla muestra las dimensiones de las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{gl}(m)$ ,  $m = \dim V$ , que aparecen en la tabla anterior. Con esta información se puede chequear que por lo menos las dimensiones de las descomposiciones de esta tabla son correctas.

		Representaciones irreducibles									
$\mathfrak{gl}(2)$											
dim		3	1	4	2	0	5	3	1	0	0
$\mathfrak{gl}(3)$											
dim		6	3	10	8	1	15	15	6	3	0
$\mathfrak{gl}(4)$											
dim		10	6	20	20	4	35	45	20	15	1
$\mathfrak{gl}(5)$											
dim		15	10	35	40	10	70	105	50	45	5

Una gran parte de todas las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{gl}(m)$ , más precisamente la mitad, se obtienen como las que hemos visto. Es decir, son subrepresentaciones de  $V \otimes \cdots \otimes V$ . Aquellas cuyos diagramas tienen  $n$  cuadritos en total viven dentro de

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_n,$$

y si  $m < n$ , entonces sólo existen aquellas con a lo sumo  $m$  filas.

4.2. **La dualidad  $S_n \longleftrightarrow \mathfrak{gl}(m)$ .** Para terminar queremos hacer explícita la dualidad que hay entre las representaciones irreducibles del grupo simétrico y las del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(m)$  que descomponen al producto tensorial  $V \otimes \cdots \otimes V$ .

Observemos con cuidado, una vez más, las Tablas 3.5 y 4.11, con las descomposiciones de  $V \otimes \cdots \otimes V$  bajo estas dos acciones, junto con las tablas complementarias con las dimensiones de las representaciones irreducibles que aparecen. ¿Qué se ve?

¡¡Ésta es la dualidad de Schur!!

Explicemos el fenómeno más claramente. Primero precisemos el marco. Sea  $m = \dim V$  y consideremos el espacio

$$W = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_n$$

bajo la acción del grupo simétrico  $S_n$  y la del álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(m)$ . Recordemos que  $S_n$  actúa permutando las coordenadas mientras que la acción de  $\mathfrak{gl}(m)$  es en cada coordenada. La acción de  $S_n$  no altera la estructura interna de cada coordenada y la de  $\mathfrak{gl}(m)$  no altera la estructura de coordenadas del producto.

Estas dos acciones *conmutan*, es decir, es lo mismo hacer actuar una permutación  $\sigma$  de coordenadas y luego una matriz  $A \in \mathfrak{gl}(m)$  coordenada a coordenada que hacer actuar primero la matriz  $A$  y luego la permutación  $\sigma$ ; estas dos acciones no interfieren una con la otra.

Formalmente, esto es la identidad

$$A \circ \sigma = \sigma \circ A$$

como transformaciones lineales de  $V \otimes \cdots \otimes V$ .

De esto se sigue que la transformación inducida por cualquier  $A \in \mathfrak{gl}(m)$  en  $W = V \otimes \cdots \otimes V$  es un homomorfismo de  $W$  en  $W$  visto como representación de  $S_n$ .

**Ejemplo 4.12.** Sean  $n = 3$ ,  $\sigma = (132)$  y  $A \in \mathfrak{gl}(m)$ . Entonces por un lado

$$\begin{aligned} A \circ \sigma(u \otimes v \otimes w) &= A \cdot (132)(u \otimes v \otimes w) \\ &= A \cdot (v \otimes w \otimes u) \\ &= Av \otimes w \otimes u + v \otimes Aw \otimes u + v \otimes w \otimes Au; \end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned} \sigma \circ A(u \otimes v \otimes w) &= \sigma(Au \otimes v \otimes w + u \otimes Av \otimes w + u \otimes v \otimes Aw) \\ &= (132)(Au \otimes v \otimes w) + (132)(u \otimes Av \otimes w) + (132)(u \otimes v \otimes Aw) \\ &= Av \otimes w \otimes u + v \otimes Aw \otimes u + v \otimes w \otimes Au. \end{aligned}$$

**Observación importante.** Sabemos que  $W$  se descompone bajo la acción de  $S_n$  como suma de representaciones irreducibles de  $S_n$  de distintos tipos y que cada tipo aparece en general muchas veces, es decir

$$W = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_n = a_1 V_1 \oplus \cdots \oplus a_k V_k,$$

donde las representaciones  $V_i$  son irreducibles y distintas. El Lema de Schur implica que si  $\phi : W \rightarrow W$  es un homomorfismo, entonces  $\phi : a_i V_i \rightarrow a_i V_i$ . En particular, como la transformación lineal que induce cada  $A \in \mathfrak{gl}(m)$  en  $W$  es un homomorfismo, se sigue que ésta preserva las componentes isotópicas de  $W$ . Luego cada componente *isotópica*  $a_i V_i$  de  $W$  es una representación de  $\mathfrak{gl}(m)$ . La primera pregunta natural es, ¿es irreducible o no? Además, si es irreducible, ¿cuál es?, y si no lo es, ¿cómo se descompone?

Volvamos sobre algunos ejemplos que ya analizamos en la Sección 3.

**Ejemplo 4.13.** Sea  $V$  de dimensión 2, sea  $\{e, f\}$  una base de  $V$  y consideremos el producto tensorial  $V \otimes V$  bajo la acción de  $S_2$  permutando sus coordenadas.

Vimos en el Ejemplo 3.1 que

$$V \otimes V = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array},$$

donde una base compatible con esta descomposición es

$$V \otimes V = \langle e \otimes e \rangle \oplus \langle f \otimes f \rangle \oplus \langle e \otimes f + f \otimes e \rangle \oplus \langle e \otimes f - f \otimes e \rangle.$$

La componente isotópica de tipo  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$  tiene tres sumandos irreducibles, cada uno de dimensión 1, y una base de esta componente isotópica es  $\{e \otimes e, f \otimes f, e \otimes f + f \otimes e\}$ . Notamos que los tres vectores de esta base son vectores peso para  $\mathfrak{gl}(2)$ . Más aún, el primero  $e \otimes e$  es de peso dominante  $(2, 0)$ , es anulado por  $E_{12}$ ,  $E_{21}e \otimes e = f \otimes e + e \otimes f$  y  $E_{21}E_{21}e \otimes e = 2f \otimes f$ . Es decir, esta componente isotópica es una representación irreducible de  $\mathfrak{gl}(2)$  correspondiente al diagrama de peso máximo  $(2, 0)$ . Coincidentemente, a ésta le corresponde el mismo diagrama  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$ .

**Ejemplo 4.14.** Sea ahora  $V$  de dimensión 3, sea  $\{e, f, g\}$  una base de  $V$  y consideremos el producto tensorial  $V \otimes V$  bajo la acción de  $S_2$  permutando sus coordenadas.

Vimos en el Ejemplo 3.2 que

$$V \otimes V = 6 \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 3 \times \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array},$$

donde una base compatible con esta descomposición es

$$V \otimes V = \langle \{e \otimes e, f \otimes f, g \otimes g, e \otimes f + f \otimes e, e \otimes g + g \otimes e, f \otimes g + g \otimes f\} \rangle \oplus \langle \{e \otimes f - f \otimes e, e \otimes g - g \otimes e, f \otimes g - g \otimes f\} \rangle.$$

Ahora, el primer sumando directo, de dimensión 6, es nuevamente una representación irreducible, en este caso de  $\mathfrak{gl}(3)$  con vector de peso máximo  $e \otimes e$ . El diagrama que le corresponde a ésta es nuevamente el mismo que describe el tipo de la componente isotópica que estamos estudiando.

**Ejemplo 4.15.** Hagamos un ejemplo más. Consideremos nuevamente  $V$  de dimensión 2, sea  $\{e, f\}$  una base de  $V$  y consideremos el producto tensorial  $V \otimes V \otimes V$  bajo la acción de  $S_3$  permutando sus coordenadas.

En este caso vimos en el Ejemplo 3.3 que

$$V \otimes V \otimes V = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array},$$

donde una base compatible con esta descomposición es

$$V \otimes V \otimes V = \langle \{e \otimes e \otimes e, f \otimes f \otimes f, e \otimes e \otimes f + e \otimes f \otimes e + f \otimes e \otimes e, e \otimes f \otimes f + f \otimes e \otimes f + f \otimes f \otimes e\} \rangle \oplus \langle \{f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e, e \otimes e \otimes f - f \otimes e \otimes e\} \rangle \oplus \langle \{e \otimes f \otimes f - f \otimes e \otimes f, e \otimes f \otimes f - f \otimes f \otimes e\} \rangle.$$

Esta vez analicemos la componente isotópica de tipo  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$  que tiene dimensión 2, como

representación de  $S_3$ . Esta componente es suma de dos copias de una irreducible (la estándar de  $S_3$ ), y una base de la primera copia es

$$\{v_1 = f \otimes e \otimes e - e \otimes f \otimes e, v_2 = e \otimes e \otimes f - f \otimes e \otimes e\}$$

y una base de la segunda copia es

$$\{w_1 = e \otimes f \otimes f - f \otimes e \otimes f, w_2 = e \otimes f \otimes f - f \otimes f \otimes e\}.$$

Observamos que tanto  $v_1$  como  $v_2$  son vectores de peso dominante  $(2, 1, 0)$ . Además es fácil verificar que ambos son anulados por  $E_{12}$  y que

$$E_{21}v_1 = w_1, \quad E_{12}v_2 = w_2.$$

Lo que hemos observado en estos ejemplos es un hecho general. Las distintas copias de un tipo dado que forman cada componente isotípica de  $V \otimes \cdots \otimes V$  bajo la acción de  $S_n$  están organizadas como en una representación irreducible de  $\mathfrak{gl}(m)$  cuyo diagrama de Young es el que le corresponde al tipo en cuestión.

Recíprocamente, las distintas copias de un tipo dado que forman cada componente isotípica de  $V \otimes \cdots \otimes V$  bajo la acción de  $\mathfrak{gl}(m)$  están organizadas como en una representación irreducible de  $S_n$  cuyo diagrama de Young es el que le corresponde al tipo en cuestión.

Dado un tipo, es decir un cierto diagrama de Young, la componente isotípica correspondiente del producto tensorial  $V \otimes \cdots \otimes V$  tiene la siguiente estructura que resume el diagrama más abajo. Las filas son todas representaciones irreducibles de  $S_n$  del mismo tipo, mientras que las columnas son representaciones irreducibles de  $\mathfrak{gl}(m)$  del mismo tipo. Podríamos entonces resumir todo esto diciendo informalmente que la componente isotípica de  $V \otimes \cdots \otimes V$ , tanto para  $\mathfrak{gl}(m)$  como para  $S_n$ , correspondiente a un tipo  $D$  “es de la forma  $D \otimes D$ ”.

*Componente isotípica de  $V \otimes \cdots \otimes V$  de tipo  $D$ , bajo las acciones de  $S_n$  y  $\mathfrak{gl}(m)$*

	$\mathfrak{gl}(m)$	...	...	$\mathfrak{gl}(m)$	
$S_n$	$v_1^1$	...	...	$v_1^k$	
⋮	⋮			⋮	~ “ $D \otimes D$ ”
⋮	⋮			⋮	
$S_n$	$v_l^1$	...	...	$v_l^k$	

Acá  $k$  es la dimensión de la representación irreducible de  $S_n$  del tipo dado y  $l$  es la dimensión de la representación irreducible de  $\mathfrak{gl}(m)$  del tipo dado, como ya habíamos observado.

CIEM-FAMAF, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, CIUDAD UNIVERSITARIA, 5000 CÓRDOBA, ARGENTINA

*E-mail:* ptirao@mate.uncor.edu