

## MINIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN LINEAL SUJETA A UNA RESTRICCIÓN CUADRÁTICA CONVEXA

TATIANA I. GIBELLI

RESUMEN. El problema de minimización de una función lineal sujeta a restricciones cuadráticas convexas aparece en varias aplicaciones, entre ellas, algunos problemas de optimización topológica tales como problemas de barras y optimización de material libre. Este tipo de problema usualmente se resuelve con algoritmos basados en métodos de punto interior y métodos de penalización.

En este trabajo se analiza la solución del problema de minimización de una función lineal sujeta a una única restricción cuadrática. En primer lugar se considera el caso en que la restricción cuadrática es estrictamente convexa. Luego se analiza el caso con restricción cuadrática convexa. En ambos casos, la solución del problema se obtiene considerando las características geométricas del mismo y una descomposición de la matriz asociada a la restricción cuadrática. Para el primer caso se utiliza descomposición de Cholesky y para el segundo, descomposición en valores singulares. Se presentan además algunos ejemplos numéricos y comentarios acerca de los resultados obtenidos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Algunos problemas de optimización topológica, tales como problemas de barras y problemas de optimización de material libre, pueden plantearse como un problema de optimización con restricciones de la forma

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c^T x \\ & \frac{1}{2} x^T A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas y semidefinidas positivas, y  $b_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i = 1, \dots, m$  [4].

Esta clase de problemas pertenece a una clase más general, los problemas de optimización convexa. Estos problemas se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

donde  $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones convexas dos veces diferenciables. El conjunto de soluciones de estos problemas se supone no vacío, compacto y debe existir  $\hat{x}$  tal que  $g_i(\hat{x}) < 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Existen varios métodos numéricos que resuelven este problema con algunas condiciones adicionales. Los más populares son los métodos de punto interior [2, 3, 5, 8, 12]. Estos consisten en transformar el problema con restricciones en una sucesión de problemas irres- trictos, los cuales, en cada iteración, son resueltos vía algoritmos conocidos, por ejemplo el método de Newton.

En este trabajo, el problema (1) se analiza para el caso en que la restricción cuadrática es única, es decir,  $m = 1$ . Se obtiene la solución del problema considerando las características geométricas del mismo y utilizando una descomposición de la matriz asociada a la restricción para plantear el problema en forma más simple. Para el caso con restricción cuadrática estrictamente convexa, es decir, con matriz asociada simétrica y definida positiva, se considera una descomposición de Cholesky de la misma. Cuando la restricción cuadrática tiene matriz asociada semidefinida positiva se considera una descomposición en valores singulares.

## 2. CASO 1: RESTRICCIÓN CUADRÁTICA EstrictAMENTE CONVEXA

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c^T x \\ & \frac{1}{2}x^T A x - d^T x \leq b, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $c \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y definida positiva, y  $b \in \mathbb{R}$ .

Como la función objetivo  $f(x) = c^T x$  tiene gradiente  $\nabla f(x) = c \neq 0$ , la solución del problema se encuentra en la frontera. Por lo tanto, resolver el problema (2) es equivalente a resolver el problema

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c^T x \\ & \frac{1}{2}x^T A x - d^T x = b. \end{aligned} \quad (3)$$

El problema (3) puede transformarse considerando una simple sustitución, que consiste en trasladar el centro de la cuadrática  $\frac{1}{2}x^T A x - d^T x = b$  al origen. Consideremos la sustitución  $x = \bar{x} + A^{-1}d$  y  $b = \bar{b} - \frac{1}{2}d^T A^{-1}d$  en (3), luego

- función objetivo:  $c^T x = c^T (\bar{x} + A^{-1}d) = c^T \bar{x} + c^T A^{-1}d$ ,
- restricción cuadrática:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^T A x - d^T x = b & \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\bar{x} + A^{-1}d)^T A (\bar{x} + A^{-1}d) - d^T (\bar{x} + A^{-1}d) = b \Leftrightarrow \\ & \frac{1}{2}\bar{x}^T A \bar{x} + d^T \bar{x} + \frac{1}{2}d^T A^{-1}d - d^T \bar{x} - d^T A^{-1}d = b \Leftrightarrow \\ & \frac{1}{2}\bar{x}^T A \bar{x} = b + \frac{1}{2}d^T A^{-1}d \Leftrightarrow \frac{1}{2}\bar{x}^T A \bar{x} = \bar{b}. \end{aligned}$$

Luego, el problema (3) es equivalente a  $\begin{cases} \min_{s.a.} & c^T \bar{x} \\ & \frac{1}{2}\bar{x}^T A \bar{x} = \bar{b} \end{cases}$ .

Para simplificar la notación consideraremos a partir de ahora la resolución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c^T x \\ & \frac{1}{2}x^T A x = b. \end{aligned} \quad (4)$$

A continuación se muestran algunos lemas, utilizados para obtener la solución del problema (4).

**Lema 2.1.** *La solución  $x^*$  del problema (4) es única. Además se verifica que  $c$  es perpendicular a la restricción en el punto  $x^*$ .*

**Demostración:** La solución del problema (4) se obtiene en un punto  $x^*$  donde la hipersuperficie de nivel  $g_1(x) = c^T x - c^T x^* = 0$  es tangente a la restricción  $\frac{1}{2}x^T Ax = b$  en  $x^*$  (ver Figura 1). Luego, se verifica que  $\nabla g_1(x) = c$  es perpendicular a  $\frac{1}{2}x^T Ax = b$  en  $x^*$ . Si bien existen dos puntos en tales condiciones, el mínimo es el que se obtiene en la dirección de decrecimiento de función objetivo ( $v = -\nabla f(x) = -c$ ).  $\square$

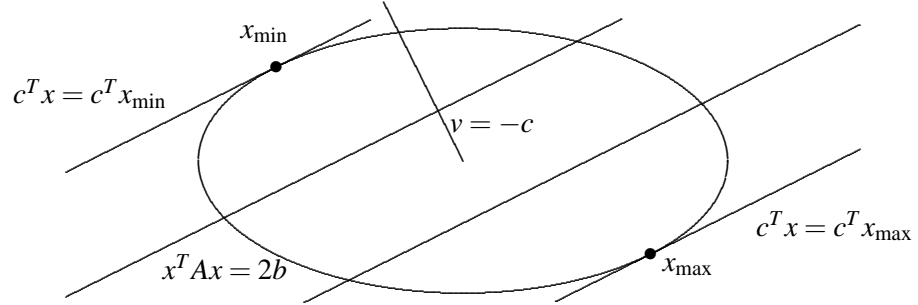


FIGURA 1. Características geométricas del problema

**Lema 2.2.** La solución del problema  $\begin{cases} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & x^T x = 2b \end{cases}$  es  $x^* = -\sqrt{\frac{2b}{c^T c}} c$ .

**Demostración:** Por lema anterior, la solución será un punto perteneciente a la frontera  $x^T x = 2b$  tal que  $c$  es perpendicular a la misma en dicho punto. Pero  $x^T x = 2b$  es una bola en  $\mathbb{R}^n$ , y cualquier recta que pasa por el centro es perpendicular a la bola. Además el punto mínimo se obtiene siguiendo la dirección de decrecimiento de la función objetivo  $v = -c$ . Por lo tanto, la solución será el punto de intersección entre semirrecta  $x(t) = -tc, t > 0$  y restricción  $x^T x = 2b$  (ver Figura 2):

$$x^T x = 2b \text{ y } x(t) = -tc, t > 0 \Rightarrow t^2 c^T c = 2b \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2b}{c^T c}}.$$

Entonces,

$$x^* = -\sqrt{\frac{2b}{c^T c}} c.$$

$\square$

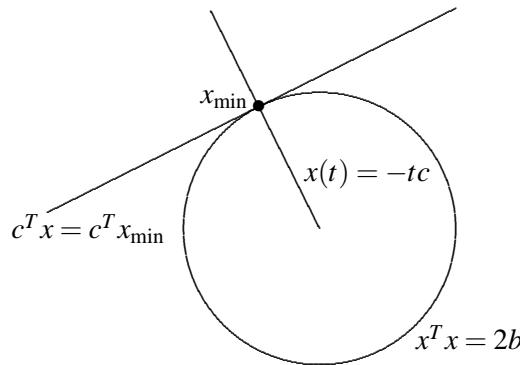


FIGURA 2. Ejemplo del problema con restricción  $x^T x = 2b$

**Teorema.** La solución del problema (4) es

$$x^* = -\sqrt{\frac{2b}{c^T A^{-1} c}} A^{-1} c.$$

**Demostración:** Como la matriz  $A$  es simétrica y definida positiva podemos hallar su descomposición de Cholesky  $A = L^T L$ .

Considerando en (4) la sustitución  $\bar{x} = Lx$  y  $\bar{c} = L^{-T} c$ , se obtiene

- en función objetivo:  $c^T x = c^T L^{-1} \bar{x} = (L^{-T} c)^T \bar{x} = \bar{c}^T \bar{x}$ ,
- en restricción:  $x^T A x = 2b \Leftrightarrow x^T L^T L x = 2b \Leftrightarrow \bar{x}^T \bar{x} = 2b$ .

Entonces, resolver el problema (4) es equivalente a resolver 
$$\begin{cases} \min_{s.a.} & \bar{c}^T \bar{x} \\ & \bar{x}^T \bar{x} = 2b \end{cases} .$$

Por lema 2.2 la solución de este problema es  $\bar{x}^* = -\sqrt{\frac{2b}{\bar{c}^T \bar{c}}} \bar{c}$ . Reemplazando en esta solución  $\bar{x} = Lx$  y  $\bar{c} = L^{-T} c$  obtenemos

$$\begin{aligned} Lx^* &= -\sqrt{\frac{2b}{(L^{-T} c)^T L^{-T} c}} L^{-T} c, \\ x^* &= -\sqrt{\frac{2b}{c^T L^{-1} L^{-T} c}} L^{-1} L^{-T} c, \\ x^* &= -\sqrt{\frac{2b}{c^T A^{-1} c}} A^{-1} c. \end{aligned}$$

□

Para resolver el problema en forma numérica, en lugar de calcular  $A^{-1} c$ , es conveniente resolver el sistema  $Ax = c$ . En la resolución de sistemas grandes puede resultar adecuado el método del gradiente espectral por su bajo costo computacional [6, 9, 10, 11].

Podemos observar que la solución del problema (2), teniendo en cuenta la traslación al origen realizada y la solución del problema (4), es

$$x^* = A^{-1} d - \sqrt{\frac{2b + d^T A^{-1} d}{c^T A^{-1} c}} A^{-1} c. \quad (5)$$

### 3. CASO 2: RESTRICCIÓN CUADRÁTICA CONVEXA

Analicemos ahora el problema de optimización con restricciones

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} & c^T x \\ & \frac{1}{2} x^T A x - d^T x \leq b, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $c \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y semidefinida positiva y  $b \in \mathbb{R}$ .

Como el conjunto factible, en este caso, puede ser no acotado, la solución del problema puede no existir, y en caso de que exista, puede no ser única. Para el caso en que la solución no es única, se propone hallar la solución de mínima norma.

El siguiente lema será utilizado para obtener la solución del problema.

**Lema 3.1.** La solución del problema  $\begin{cases} \min_{s.a.} & (\|v\|^2 = v^T v) \\ & v^T u = a \end{cases}$  es  $v = \frac{a}{\|u\|^2} u$ .

**Demostración:** La función de Lagrange para este problema es  $L(v, \lambda) = v^T v + \lambda(v^T u - a)$ .

Por condición necesaria de primer orden,  $\nabla L(v, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2v + \lambda u = 0 \\ v^T u - a = 0 \end{cases}$ .

De  $v = \frac{\lambda}{2} u$  y  $v^T u - a = 0$  se obtiene  $\frac{\lambda}{2} = \frac{a}{u^T u}$ . Por lo tanto,  $v = \frac{a}{\|u\|^2} u$ .

Como  $L_{vv}(v, \lambda) = 2$  es definida positiva, entonces, por condición suficiente, el valor de  $v$  hallado es el mínimo.  $\square$

Para analizar la existencia de solución, consideremos la función de Lagrange para el problema (6):

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda(\frac{1}{2}x^T A x - d^T x - b).$$

De la condición necesaria de primer orden,

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c + \lambda A x - \lambda d = 0 \\ \frac{1}{2}x^T A x - d^T x - b = 0. \end{cases}$$

De  $c + \lambda A x - \lambda d = 0$  obtenemos:  $-c = \lambda(Ax - d)$ . Entonces  $c$  debe pertenecer al espacio generado por columnas de  $A$  y  $d$ . El espacio generado por columnas de  $A$  es el espacio generado por sus autovectores, por lo que resulta apropiado considerar la descomposición en valor singulares de  $A$ .

Supongamos que la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y semidefinida positiva tiene rango  $r \leq n$ . Consideremos la descomposición en valores singulares de la matriz  $A$ ,

$$A = U^T \bar{A} U,$$

donde:

- $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0}_{r, n-r} \\ \mathbf{0}_{n-r, r} & \mathbf{0}_{n-r, n-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  diagonal con autovalores no nulos en la diagonal (por lo tanto es simétrica y definida positiva), y  $\mathbf{0}_{i,j} \in \mathbb{R}^{i \times j}$  matriz nula,
- $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal.

Considerando en el problema (6) la sustitución  $z = Ux$ ,  $\bar{c} = Uc$  y  $\bar{d} = Ud$  se obtiene que

- la función objetivo:  $c^T x = c^T U^T z = (Uc)^T z = \bar{c}^T z$ ,
- la restricción:  $\frac{1}{2}x^T A x - d^T x = \frac{1}{2}x^T U^T \bar{A} U x - d^T U^T U x = \frac{1}{2}z^T \bar{A} z - \bar{d}^T z$ .

Luego, resolver el problema (6) es equivalente a resolver

$$\min_{s.a.} \bar{c}^T z \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}z^T \bar{A} z - \bar{d}^T z \leq b.$$

Consideremos en el problema (7) la partición de  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$  y  $z$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_r \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} d_r \\ d_{n-r} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_r \\ z_{n-r} \end{pmatrix}$$

donde  $c_r, d_r, z_r \in \mathbb{R}^r$  y  $c_{n-r}, d_{n-r}, z_{n-r} \in \mathbb{R}^{n-r}$ . Luego,

- función objetivo:  $\bar{c}^T z = c_r^T z_r + c_{n-r}^T z_{n-r}$ ,

- restricción:  $\frac{1}{2}z^T \bar{A}z - \bar{d}^T z = \frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r - d_{n-r}^T z_{n-r}$ .

Entonces resolver el problema (7) es equivalente a resolver el problema

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c_r^T z_r + c_{n-r}^T z_{n-r} \\ & \frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r - d_{n-r}^T z_{n-r} \leq b. \end{aligned} \quad (8)$$

Consideremos la función de Lagrange para el problema (8)

$$L(z_r, z_{n-r}, \lambda) = c_r^T z_r + c_{n-r}^T z_{n-r} + \lambda \left( \frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r - d_{n-r}^T z_{n-r} - b \right).$$

Por condición necesaria de existencia de punto estacionario,

$$\nabla L(z_r, z_{n-r}, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_r + \lambda A_r z_r - \lambda d_r = 0 \\ c_{n-r} - \lambda d_{n-r} = 0 \\ \frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r - d_{n-r}^T z_{n-r} - b = 0. \end{cases}$$

De  $c_{n-r} - \lambda d_{n-r} = 0$  podemos considerar dos casos:

1. Si  $d_{n-r} = 0$ , entonces debe ser  $c_{n-r} = 0$ . Luego el problema (8) se reduce a resolver

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & c_r^T z_r \\ & \frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r \leq b. \end{aligned} \quad (9)$$

El valor de  $z_r$  que resuelve el problema (9) es único pues la restricción es cuadrática estrictamente convexa (ya que  $A_r$  es simétrica y definida positiva). De (5) sabemos que

$$z_r^* = A_r^{-1} d_r - \sqrt{\frac{2b + d_r^T A_r^{-1} d_r}{c_r^T A_r^{-1} c_r}} A_r^{-1} c_r.$$

En este caso la solución del problema (8) no es única pues  $z_{n-r}$  no está unívocamente determinado. La solución de mínima norma se obtiene considerando  $z_{n-r} = \mathbf{0}_{n-r}$ , es decir,  $z^* = (z_r^{*T}, \mathbf{0}_{n-r}^T)^T$ .

La solución es única si  $r = n$ , es decir, si  $A$  no tiene autovalores nulos.

2. Si  $d_{n-r} \neq 0$ , entonces debe ser  $c_{n-r} = \lambda d_{n-r}$ , de donde se obtiene el valor  $\lambda = \lambda^*$ . Por condición suficiente de existencia de mínimo,  $\lambda A_r$  definida positiva  $\Leftrightarrow \lambda > 0$ . Entonces, si  $\lambda^* > 0$ , de  $c_r + \lambda A_r z_r - \lambda d_r = 0$  se obtiene:

$$z_r^* = A_r^{-1} \left( d_r - \frac{1}{\lambda^*} c_r \right).$$

Considerando  $z_r^*$  en  $\frac{1}{2}z_r^T A_r z_r - d_r^T z_r - d_{n-r}^T z_{n-r} = b$  obtenemos:  $d_{n-r}^T z_{n-r} = \frac{1}{2}z_r^{*T} A_r z_r^* - d_r^T z_r^* - b$ . El valor  $z_{n-r}$  que satisface esta ecuación no siempre es único. Por Lema 3.1, mostrado al final de esta sección, podemos obtener la solución de mínima norma:

$$z_{n-r}^* = \frac{\frac{1}{2}z_r^{*T} A_r z_r^* - d_r^T z_r^* - b}{d_{n-r}^T d_{n-r}} d_{n-r}.$$

Luego, la solución de mínima norma del problema (8) es  $z^* = (z_r^{*T}, z_{n-r}^{*T})^T$ .

La solución es única cuando  $d_{n-r} \neq 0 \in \mathbb{R}$ , es decir,  $r = n - 1$  y por lo tanto  $A$  tiene un único autovalor nulo. En cualquier otro caso la solución no es única.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la solución del problema (6) puede obtenerse por medio del siguiente algoritmo.

### Algoritmo 1

Datos:  $c \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica y semi-definida positiva,  $d \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

**Paso 1:** Hallar  $U$  y  $A_r$  tal que  $A = U^T \begin{pmatrix} A_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{pmatrix} U$  y  $U^T U = I$ .

**Paso 2:** Calcular:  $\bar{c} = Uc = (c_r^T, c_{n-r}^T)^T$  y  $\bar{d} = Ud = (d_r^T, d_{n-r}^T)^T$ .

**Paso 3:**

1) Si  $d_{n-r} = 0$  entonces:

- Si  $c_{n-r} = 0$ , entonces:

$$- z_r^* = A_r^{-1} d_r - \sqrt{\frac{2b + d_r^T A_r^{-1} d_r}{c_r^T A_r^{-1} c_r}} A_r^{-1} c_r.$$

$$- z^* = (z_r^{*T}, \mathbf{0}_{n-r}^T)^T.$$

$$- x^* = U^T z^*.$$

sino "problema no acotado".

2) Si  $d_{n-r} \neq 0$  entonces:

- Si  $c_{n-r} = \lambda^* d_{n-r}$  con  $\lambda^* > 0$ , entonces:

$$- z_r^* = A_r^{-1} (d_r - \frac{1}{\lambda^*} c_r).$$

$$- z_{n-r}^* = \frac{\frac{1}{2} z_r^{*T} A_r z_r^* - d_r^T z_r^* - b}{d_{n-r}^T d_{n-r}} d_{n-r}.$$

$$- z^* = (z_r^{*T}, z_{n-r}^{*T})^T.$$

$$- x^* = U^T z^*.$$

sino "problema no acotado".

Para la implementación de este algoritmo puede observarse que:

- Caso 2 incluye el Caso 1, es decir, el Algoritmo 1 puede ser utilizado para hallar la solución del cualquier problema de minimización de una función lineal sujeta a una restricción cuadrática convexa. Sin embargo, cuando la restricción es estrictamente convexa es conveniente obtener la solución vía (5) ya que en este caso no es necesaria la descomposición en valores singulares de la matriz.
- En **Paso 1** deberá considerarse un algoritmo que obtenga la descomposición en valores singulares de una matriz, por ejemplo, el algoritmo de Kahan y Golub [7]. La forma de obtener esta descomposición influye, tanto en tiempo de cómputo como en la precisión de la solución. Por este motivo Algoritmo 1 resulta más eficiente cuando esa descomposición no es necesaria o puede obtenerse fácilmente.
- En **Paso 3**, se pueden simplificar algunos cálculos pues, como la matriz  $A_r$  es una matriz diagonal con autovalores positivos en la diagonal, es decir,  $A_r = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ , entonces, considerando  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ ,
  - $A_r x = (v_1 x_1, v_2 x_2, \dots, v_r x_r)$ ,
  - $A_r^{-1} x = (x_1/v_1, x_2/v_2, \dots, x_r/v_r)$ .

## 4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Como se mencionó en la Sección 1, existen algoritmos para resolver el problema considerado en este trabajo. La mayoría de los métodos conocidos son iterativos, basados en métodos de punto interior y métodos de penalización, que permiten obtener la solución de diferentes problemas convexos. A diferencia de éstos, el algoritmo propuesto obtiene la solución del problema en forma directa y puede ser utilizado sólo para resolver el problema particular de minimización de función lineal sujeta a restricción cuadrática convexa.

En esta sección se presentan algunos ejemplos en que se obtiene la solución del problema aplicando el algoritmo presentado. El algoritmo ha sido implementado en MATLAB, y los ejemplos fueron resueltos en una PC con procesador Pentium IV, 2.40 GHz, con 512 MB RAM. En **Paso 2**, las matrices  $U$  y  $A_r$ , correspondientes a la descomposición en valores singulares de la matriz  $A$ , son obtenidas con la subrutina *svd.m* de MATLAB (la misma pertenece al paquete LAPACK [1]).

Los resultados obtenidos con Algoritmo 1 son comparados con los que se obtienen al utilizar la subrutina *fmincon.m* del toolbox de optimización de MATLAB (esta función resuelve problemas de minimización con restricciones y está basada en el método interior-reflexivo de Newton y estrategia de región de confianza).

En las tablas se utilizan las siguientes notaciones:

- $n$ : número de variables del problema.
- $f^* = c^T x^*$ : el valor de la función objetivo en el valor estimado  $x^*$ .
- $r = \|\frac{1}{2}x^{*T}Ax^* - b\|$ : el valor absoluto de la restricción evaluada en  $x^*$ . Observemos que este valor debería ser cero.
- **CPU time**: tiempo de cómputo requerido para obtener la solución.

Sea  $v = (1, 2, \dots, n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Se analizarán tres problemas diferentes, considerando en (4) diferentes valores para  $c \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

- **Problema 1:**  $c = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = \text{diagonal}(v)$ ,  $d = 0$  y  $b = 1$ .
- **Problema 2:**  $c = v$ ,  $A = vv^T$ ,  $d = 0 \in \mathbb{R}^n$  y  $b = 1$ .
- **Problema 3:**  $c = v$ ,  $A = B^T B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz “mágica” construida con enteros de 1 a  $n^2$  de forma tal que la suma de las componentes de cualquier fila o columna es igual,  $d = v$  y  $b = 1$ .

n	Algoritmo 1	<i>fmincon</i>
10	$f^* = -1.71142287409286$ $r = 4.440892098500626e - 016$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.71142306149662$ $r = 3.226001574763160e - 007$ <b>CPU time = 0.3</b>
20	$f^* = -1.89677084992987$ $r = -3.330669073875470e - 016$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.89677126828063$ $r = 5.202373778434577e - 007$ <b>CPU time = 0.6</b>
40	$f^* = -2.06846393223000$ $r = 0$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -2.06845942310633$ $r = 8.008426419792158e - 007$ <b>CPU time = 4.1</b>

TABLA 1. Problema 1 para diferentes valores de  $n$



<b>n</b>	<b>Algoritmo 1</b>	<b><i>fmincon</i></b>
50	$f^* = -1.41421356237310$ $r = 0$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.41421356237414$ $r = 2.950084621033966e - 012$ <b>CPU time = 0.3</b>
100	$f^* = -1.41421356237310$ $r = 0$ <b>CPU time = 0.05</b>	$f^* = -1.41421356239834$ $r = 7.139755453522412e - 011$ <b>CPU time = 0.9</b>
200	$f^* = -1.41421356237309$ $r = 4.440892098500626e - 016$ <b>CPU time = 0.3</b>	$f^* = -1.41421361000466$ $r = 1.347224110048728e - 007$ <b>CPU time = 4.5</b>

TABLA 2. Problema 2 para diferentes valores de  $n$

<b>n</b>	<b>Algoritmo 1</b>	<b><i>fmincon</i></b>
12	$f^* = -1$ $r = -8.837375276016246e - 014$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.00000003731442$ $r = 8.970851261835833e - 008$ <b>CPU time = 0.3</b>
20	$f^* = -1$ $r = 1.771915947301750e - 013$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.00000037090778$ $r = 8.611258932589294e - 007$ <b>CPU time = 0.8</b>
40	$f^* = -1$ $r = -4.313216450668733e - 012$ <b>CPU time = 0</b>	$f^* = -1.00000015854753$ $r = 3.180257968082856e - 007$ <b>CPU time = 6.5</b>

TABLA 3. Problema 3 para diferentes valores de  $n$

Los problemas dados corresponden a los diferentes casos considerados en este trabajo. Problema 1, corresponde a Caso 1, y la aplicación de Algoritmo 1 coincide con (5). En Problema 2 la matriz tiene rango 1 y corresponde al caso considerado en **Paso 3.1**. En Problema 3 la matriz tiene rango 3 (si  $n$  es par divisible por 4) y corresponde al caso considerado en **Paso 3.2**.

Como la solución con Algoritmo 1 es obtenida en forma directa, el tiempo de cómputo es menor que el requerido por los algoritmos iterativos. Esto puede observarse, en los resultados mostrados en las tablas, pues el tiempo de cómputo de Algoritmo 1 es considerablemente menor que el requerido por el algoritmo iterativo con que se compara (subrutina *fmincon.m* del toolbox de optimización de MATLAB). Esta diferencia se hace más notable a medida que se incrementa el número de variables del problema. Por este motivo, el algoritmo propuesto en este trabajo puede resultar apropiado para resolver problemas de dimensiones grandes.

### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una manera de obtener, en forma directa, la solución del problema de minimización de una función lineal sujeta a una restricción cuadrática convexa.

Se analizan por separado el caso de una restricción estrictamente convexa y el caso de una restricción convexa.

El algoritmo presentado resulta, por su simplicidad, apropiado para problemas de gran escala. Además puede resultar adecuado para problemas donde la descomposición en valores singulares de la matriz asociada a la restricción cuadrática pueda obtenerse en forma eficiente.

Como se observa en los ejemplos numéricos mostrados, el tiempo de cómputo requerido por Algoritmo 1 es considerablemente menor que el requerido por los algoritmos iterativos conocidos para resolver el problema, ya que obtiene la solución en forma directa. Otra de las ventajas del algoritmo propuesto es la detección cuando se trata de problemas no acotados. La mayoría de los algoritmos conocidos para optimización con restricciones requieren que el problema dado sea acotado.

El problema de minimización de una función lineal sujeta a varias restricciones cuadráticas convexas está siendo analizado. Se pretende extender las ideas utilizadas en la resolución del caso presentado en este trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 3rd edition, 1999.
- [2] A. BEN-TAL and M.P. BENDSØE. A new method for optimal truss topological design. *SIAM Journal on Optimization*, 3(2):322–358, 1993.
- [3] A. BEN-TAL and M.P. BENDSØE. Penalty/barrier multiplier methods for convex programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, 7(2):347–366, 1997.
- [4] M.P. BENDSØE and O. SIGMUND. *Topology Optimization. Theory, Methods and Applications*. Springer, Berlin, 2003.
- [5] M.P. BENDSØE, A. BEN TAL, and J. ZOWE. Optimization methods for truss geometry and topology design. *Structural Optimization*, 7:141–159, 1994.
- [6] R. FLETCHER. On the Barzilai-Borwein method. Technical Report NA/207, Department of Mathematics, University of Dundee, Dundee, Scotland, 2001.
- [7] G.H. GOLUB and W. KAHAN. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2(2):205–224, 1965.
- [8] F. JARRE, M. KOČVARA, and J. ZOWE. Optimal truss design by interior-point methods. *SIAM Journal on Optimization*, 8(4):1084–1107, 1998.
- [9] M. RAYDAN. *Convergence properties of the Barzilai and Borwein gradient method*. PhD thesis, Dept. of Mathematical Science, Rice University, Houston, Texas, 1991.
- [10] M. RAYDAN. On the Barzilai and Borwein choice of the steplength for the gradient method. *IMA Journal Numerical Analysis*, 13:321–326, 1993.
- [11] M. RAYDAN. The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem. *SIAM Journal on Optimization*, 7:26–33, 1997.
- [12] J. ZOWE, M. KOČVARA, and M.P. BENDSØE. Free material optimization via mathematical programming. *Computers & Structures*, 79:445–466, 1997.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR Y CONICET  
E-mail: tgibelli@uns.edu.ar