ACTAS DEL VII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2003) , Páginas 69–77

FUNCIONES AUTOSIMILARES Y DE ESCALA DE DIMENSIÓN r

EDUARDO SERRANO Y MARCELA FABIO

ABSTRACT. En este trabajo exponemos una generalización, al caso de funciones vectoriales, de dimensión r de los recientes resultados de T. Blu y M.Unser que establecen una remarcable relación entre las funciones causales autosimilares y las estructuras del tipo multirresolución. Estas relaciones pueden ser explotadas en beneficio de aplicaciones numéricas en conexión con la Transformada Wavelet , particulamente en problemas de interpolación. Pueden también dar luz a otros problemas teóricos en al caso multidimensional, como es el caso de las inclusiones de las estructuras de multiresolución.

Introducción

En esta comunicación presentamos resultados que relacionan las multiwavelets causales con las funciones radiales, de dimensión $r \geq 1$. Más precisamente, se demuestra que, bajo apropiadas hipótesis, un análisis multirresolución puede ser generado a partir de una función radial y recíprocamente, una estructura de multirresolución puede extenderse al espacio vectorial generado por esa función, preservándose la relación de escala y la invariancia por traslaciones.

Estos resultados generalizan los demostrados recientemente por Unser and Blu en [1-2] para el caso unidimensional. Los resultados demostrados son particularmente útiles en las aplicaciones numéricas, en especial en la interpolación de señales.

Otros desarrollos relacionados con el tema pueden encontarse en los trabajos de Zhou [3] y Cabrelli, Heil and Molter [4]. Asimismo, los fundamentos teóricos de las estructuras de multirresolución de multiplicidad r pueden consultarse en los artículos de Hervé [6] o de Aldroubi [7].

Definiciones básicas

Consideremos una función real r dimensional $f = (f_1, \cdots, f_r)$ y causal, es decir $f_k(x) = 0$ para todo $x < 0$ y $1 \leq k \leq r$. La función será llamada *propia* si las funciones componentes son linealmente independientes en el intervalo $(0, 1]$.

Diremos que una función vectorial p dimensional $v = (v_1, \cdots, v_p)$ es *generada por* f si:

$$v(x) = \sum_{k \in Z} f(x-k)b(k) \tag{1}$$

Palabras Claves: *Funciones causales - Funciones autosimilares - Funciones de escala de multiplicidad r - Esquemas Pre-Multirresolución - Análisis Multiresolución.*

con coeficientes matriciales $b(k) \in R^{r\times p}$, asumiendo que v está definida para los valores x en los cuales la serie es convergente.

Observemos que v es causal si y sólo si la secuencia de coeficientes es también causal, esto es $b(k) = 0$ para $k < 0$. Denotaremos $S(f)$ la clase de funciones generadas por f y diremos que f es *localizable* si $S(f) \cap L^2(R) \neq \{0\}$.

Una función p dimensional v verifica una relación de doble escala si $v(\cdot/2)$ es generada por v, es decir, existen coeficientes $g(k) \in R^{p\times p}$ tales que:

$$v(x/2) = \sum_{k\in Z} v(x-k)g(k) \tag{2}$$

Sea ρ una función causal r dimensional verificando la particular relación de escala:

$$\rho(x) = \rho(x/2)\,\Lambda, \quad x \in Dom(\rho) \tag{3}$$

donde $\Lambda \in R^{r\times r}$ es una matriz inversible. Tal función será llamada *autosimilar* , con factor de escala Λ.

Dados el factor Λ y ρ definidos en algún intervalo $(2^{j+1}, 2^j]$, la función queda definida sobre la recta real. Si las componentes ρ_k con linealmente independientes en ese intervalo, las componentes ρ_k deben ser linealmente independientes en cada intervalo diádico. Particularmente, no nulas en cualquier entorno $(0, \epsilon]$.

Dada una matriz inversible $M \in R^{r\times r}$, la función $\mu = \rho M$ es también autosimilar con factor $M^{-1}\Lambda M$ siendo $S(\mu) = S(\rho)$. Ambas funciones son *equivalentes*.

Consideremos seguidamente una función $\phi \in L^2(R)$ r dimensional localizable y denotemos $V_0(\phi) = S(\phi) \cap L^2(R)$.

Recordamos que la familia $\{\phi(x-k), k \in Z\}$ es una *base de Riesz* de $V_0(\phi)$ si y sólo si existen constantes positivas $0 < A \leq B < \infty$ tales que:

$$A\,(\sum_k |c(k)|^2) \leq ||\sum_k \phi(x-k)c(k)||^2 \leq B\,(\sum_k |c(k)|^2) \tag{4}$$

para toda secuencia de coeficientes vectoriales $c(k) \in R^{r\times 1}$ que verifiquen $\sum_k |c(k)|^2 < \infty$.

Esta propiedad es equivalente a la siguiente condición: definiendo

$$Q_\phi(\omega) = \left(\sum_n \widehat{\phi_i}(\omega + 2n\pi)\widehat{\phi_j^*}(\omega + 2n\pi)\right)_{1\leq i,j\leq r} \tag{5}$$

se verifica (4) si y sólo si, los autovalores de $Q_\phi(\omega)$ satisfacen:

$$0 < \lambda_A \leq \lambda_k(\omega) < \lambda_B < \infty \tag{6}$$

para casi todo $\omega \in [0, 2\pi)$ y $1 \leq k \leq r$ y constantes positivas λ_A y λ_B.

La función ϕ es una *función escala* o *multiescala*, de multiplicidad r, si se verifican las condiciones:

- (E_1) ϕ verifica la relación de doble escala.
- (E_2) La familia $\{\phi(x-k), k \in Z\}$ es una base de Riesz de V_0.
- (E_3) $\widehat{\phi_j}$ es continua en $\omega = 0$ y $\sum_{j=1,r} |\widehat{\phi_j}(0)| > 0$.

La última condición puede reemplazarse por otras equivalentes o aún más débiles. Ver [6] por mas detalles.

Si ϕ es una función de multiscala, $V_0 = V_0(\phi)$ es el subespacio fundamental del correspondiente análisis $\mathcal{V} = (V_j, j \in Z)$.

Cualquier φ función de multiescala de dimensión r, que verifique $V_0(\varphi) = V_0(\phi)$ es *equivalente* a ϕ. En este caso, ambas funciones generan el mismo análisis de multirresolución. Sin embargo, debe observarse que en ciertos casos es posible encontrar funciones multiescala de diferentes dimensiones que generen el mismo análisis de multirresolución, [8].

Recordemos que la función φ es equivalente a ϕ si y sólo si, existe una matriz $M(\omega)$ 2π-periódica de dimensión $r \times r$ inversible para casi todo $\omega \in [0, 2\pi)$, tal que $\widehat{\varphi_j}(\omega) = \widehat{\phi}_j(\omega)M(\omega)$

En este trabajo consideraremos únicamente las relaciones entre las funciones autosimilares causales y las de multiescala r dimensionales, propias, análogamente con los resultados dados en [1-2].

Las funciones causales incluyen el importante caso de las funciones de multiescala de soporte compacto, como las B-spline, las spline de Hermite y otras deficientes. También las generadas a partir de bancos de filtros finitos [5 -7].

En la siguiente sección exprondremos algunos resultados previos.

Resultados Previos

Denotemos C_r a la clase de sucesiones causales de matrices $a = (a(k), k \in Z)$ de dimensión $r \times r$. Diremos que una sucesión $a \in C_r$ es *no singular* si la matriz $a(0)$ es inversible.

La convolución en C_r se define como:

$$(a * b)(n) = \sum_{k \geq 0}^{n} a(k)b(n-k) \quad n \geq 0 \tag{7}$$

siendo nulos los valores para los índices negativos.

Esta operación de convolución es lineal y asociativa en C_r, pero en general no es conmutativa.

El elemento neutro es la sucesión $e = (\ldots, 0, I, 0 \ldots)$, siendo $I = e(0)$, la identidad de dimensión r. Entonces:

$$a * e = e * a = a \tag{8}$$

A continuación, afirmamos que si $a \in C_r$, no singular, entonces existe una única secuencia inversa a^{-1} tal que:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \tag{9}$$

En efecto, dadas $a, b \in C_r$ y a no singular, consideremos las siguientes ecuaciones:

$$a * r = b = l * a$$

Para la primera tenemos:

$$\begin{aligned} a(0)r(0) &= b(0) \\ &\vdots \\ a(0)r(n) + \cdots + a(n)r(0) &= b(n) \quad \text{para } n \geq 1 \end{aligned}$$

de donde resulta el esquema recursivo:

$$r(0) = a^{-1}b(0) \tag{10}$$

$$\vdots$$

$$r(n) = a^{-1}(0)\left(b(n) - \sum_{k=1}^{n} a(k)r(n-k)\right) \quad \text{para } n \geq 1 \tag{11}$$

Análogamente, para la segunda:

$$l(0) = b(0)a^{-1} \tag{12}$$

$$\vdots$$

$$l(n) = \left(b(n) - \sum_{k=1}^{n} l(n-k)a(k)\right) a^{-1}(0) \quad \text{para } n \geq 1 \tag{13}$$

Estas fórmulas nos permiten calcular únivocamente las soluciones de las ecuaciones planteadas. En particular si tomamos $b = e$ obtenemos las únicas inversas a derecha a_r^{-1} y a izquierda a_l^{-1} de a:

$$a * a_r^{-1} = e = a_l^{-1} * a$$

Entonces a partir de:

$$(a_l^{-1} * a) * a_r^{-1} = a_l^{-1} * (a * a_r^{-1})$$

concluimos:

$$a_r^{-1} = a_l^{-1} = a^{-1}$$

Por otra parte, observemos, pueden definirse los *cocientes laterales* $(a^{-1} * b)$ y $(b * a^{-1})$ a izquierda y derecha, respectivamente. Remarcamos, que las fórmulas (10-11) y (12-13) nos permiten calcular eficientemente tanto los cocientes como las inversas.

Prosiguendo, dada una función causal r dimensional φ y $a \in C_r$ podemos definir otra función causal mediante las sumas finitas:

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{N(x)} \varphi(x-k)a(k) \tag{14}$$

donde $N(x)$ es el menor entero tal que $x < N(x) + 1$. Estas sumas pueden simbolizarse como la convolución mixta:

$$\mu = \varphi * a \tag{15}$$

Esta operación mixta es lineal en ambos factores y tiene a e como la secuencia identidad a derecha. Además facilmente puede comprobarse que es asociativa a derecha:

$$(\varphi * a) * b \;=\; \varphi * (a * b) \tag{16}$$

Continuamos definiendo los operadores de dilatación. En la clase de funciones causales r dimensionales:

$$D\varphi(x) \;=\; \varphi(x/2) \tag{17}$$

y en la clase de sucesiones matriciales causales:

$$Da(2m) \;=\; a(m) \tag{18}$$
$$Da(2m+1) \;=\; 0 \text{ para todo } m \text{ entero} \tag{19}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} D(\varphi * a)(x) &= (\varphi * a)(x/2) = \sum_{k\geq 0} \varphi(x/2 - k)a(k) \\ &= \sum_{k\geq 0} \varphi((x-2k)/2)a(k) = \sum_{l\geq 0} \varphi((x-l)/2)Da(l) \end{aligned}$$

de donde se concluye la importante relación:

$$D(\varphi * a) \;=\; D\varphi * Da \tag{20}$$

Denotemos $S_c(\varphi)$ la clase de funciones generadas a partir de las sucesiones causales no singulares. Claramente es un espacio vectorial.

De los resultados anteriores, se deduce que si $\mu \in S_c(\varphi)$, entonces $S_c(\mu) = S_c(\varphi)$. Más precisamente, si a es no singular, tenemos el par unívoco:

$$\mu \;=\; \varphi * a \tag{21}$$
$$\varphi \;=\; \mu * a^{-1} \tag{22}$$

Finalmente, concluimos el último e importante resultado previo. Supongamos que φ satisface una relación de doble escala (2) con g causal y no singular:

$$D\varphi \;=\; \varphi * g \tag{23}$$

y sea $\mu \in S_c(\varphi)$. Entonces afirmamos, existe h causal y no singular tal que:

$$D\mu \;=\; \mu * h \tag{24}$$

En efecto, para alguna secuencia a, causal y no singular:

$$D(\varphi * a) \;=\; D\varphi * Da = (\varphi * g) * Da = \varphi * (g * Da)$$

por lo tanto:

$$D\mu \;=\; \mu * a^{-1} * (g * Da) = \mu * (a^{-1} * g * Da)$$

de donde:

$$h \;=\; a^{-1} * g * Da \tag{25}$$

Claramente h es también causal y no singular. Este resultado nos dice que la relación de doble escala se hereda en la clase $S_c(\varphi)$.

Asumiendo que g, h y a deben ser causales y no singulares, la relación (2) plantea tres problemas:

- Dadas g y a calcular h (problema directo)
- Dadas h y a calcular g (primer problema inverso)
- Dadas g y h hallar a (segundo problema inverso)

La solución del problema directo, en general, puede computarse utilizando las fórmulas de inversión (10-11) ó (12-13) para obtener a^{-1}, calculando luego las convoluciones.

El primer problema inverso, es totalmente simétrico al directo, tomando $b = a^{-1}$, observando que Da es no singular y que $(Da)^{-1} = D(a^{-1}) = Db$.

Para ambos problemas podemos deducir las siguientes ecuaciones explicitas a partir de la igualdad:

$$a * h = g * Da \tag{26}$$

En efecto, desarrollando deducimos que:

$$a(0)h(0) = g(0)a(0) \tag{27}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{2m-1} a(2m-1-k)h(k) = \sum_{k=1}^{m} g(2k-1)a(m-k) \tag{28}$$

$$\sum_{k=0}^{2m} a(2m-k)h(k) = \sum_{k=0}^{m} g(2k)a(m-k) \tag{29}$$

para $m = 1, 2, \ldots$. Estas ecuaciones pueden resolverse recursivamente tanto para despejar h como g, según corresponda. Observemos que, para $m = 0$, la primera ecuación, bajo la condición de la no singularidad de $a(0)$, nos muestra que $g(0)$ y $h(0)$ deben ser matrices semejantes.

Veamos el segundo problema inverso. Asumamos dadas g y h. Se pretende entonces hallar a verificando las ecuaciones. Claramente existe solución si y sólo si $g(0)$ y $h(0)$ son matrices semejantes. En tal caso, $a(0)$, inversible, debe estar predefinida. Entonces, a partir de las relaciones anteriores obtenemos el esquema recursivo:

$$a(1) = (g(1)a(0) - h(1)a(0))h(0)^{-1} \tag{30}$$

$$\vdots$$

$$a(2m) = \left(\sum_{k=0}^{m} g(2k)a(m-k) - \sum_{k=1}^{2m} a(2m-k)h(k)\right) h(0)^{-1} \tag{31}$$

$$a(2m+1) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} g(2k-1)a(m-k) - \sum_{k=0}^{2m+1} a(2m+1-k)h(k)\right) h(0)^{-1} \tag{32}$$

para $m = 1, 2, \ldots$

En suma, existen ternas ordenadas (g, h, a) de sucesiones causales y no singulares donde $h(0)$ y $g(0)$ son equivalentes, que satisfacen la relación (25). Esta particular estructura se traduce en los resultados que a continuación exponemos.

Resultados Principales

Definiremos primeramente una estructura basada en las relaciones de doble escala. Como antes, denotamos D al operador de dilatación y T al operador de traslación, es decir $Df(x) = f(x/2)$ y $Tf(x) = f(x-1)$. Un esquema *pre-multirresolución* consiste en un sucesión $\mathcal{S}$ de subespacios vectoriales encajados: $\cdots \subset S_j \subset S_{j+1} \cdots$, verificando:

- (M1) si $f \in S_0$ entonces $Tf \in S_0$
- (M2) si $f \in S_0$ entonces $Df \in S_{-1}$
- (M3) existe una función causal φ tal que $S_0 = S(\varphi)$

En tal esquema, claramente $D\varphi \in S_0$, es decir φ verifica una relación de doble escala. Asumiendo cierto abuso de lenguaje, diremos que la estructura $\mathcal{S}$ es generada por φ.

Recíprocamente si φ verifica una relación de doble escala, genera por traslaciones y dilataciones un esquema de pre-multirresolución.

Observemos que esta estuctura es simple y bien general. Incluye, por ejemplo, el caso $\mathcal{S} = \{0\}$ y otros impropios o degenerados. También contempla las clases de funciones generadas por las traslaciones de funciones causales y autosimilares.

El esquema $\mathcal{S}$ será llamado *localizable* si $S_0 \cap L^2(R) \neq \{0\}$. Este es el caso, por ejemplo, si $\varphi \in L^2(R)$. Sin embargo, remarquemos, esta condición dista de ser necesaria.

Un esquema localizable generado a partir de una función de escala ϕ, causal de multiplicidad r, define un análisis de multirresolución de $L^2(R)$. En tal caso, para cada entero j, $V_j = Sj \cap L^2(R)$, o simbólicamente, $\mathcal{V} = \mathcal{S} \cap L^2(R)$.

Llegados a este punto, expongamos los resultados principales. En primer lugar enunciamos la generalización, para funciones vectoriales del primer teorema de Unser et al. en [1]. El mismo, afirma que una función radial verificando ciertas condiciones genera una estructura de análisis multirresolución.

Teorema 1. *Sea ρ una función causal autosimilar propia, de multiplicidad r. Si existe $\phi \in S_c(\rho) \cap L^2(R)$, verificando las condiciones $(E2)$ y $(E3)$, entonces es una función de escala causal propia de multiplicidad r donde el espacio $V_0 = S(\rho) \cap L^2(R)$ es el subespacio fundamental.*

Demostración. El resultado sigue de los previos. En principio la función ρ genera un esquema de pre-multirresolución y existe $\phi \in S_c \cap L^2(R)$, que como hemos visto, genera también el mismo esquema, de modo que el esquema $\mathcal{S}$ es localizable, y $S(\phi) = S(\rho)$. Además ϕ verifica una relación de doble escala, por tanto satisface las condiciones $(E1)$, $(E2)$ y $(E3)$. Es decir es una función de multiescala de multiplicidad r. El esquema $\mathcal{S} \cap L^2(R)$ es un análisis de multirresolución y $V_0 = S(\rho) \cap L^2(R) = S(\phi) \cap L^2(R)$ el espacio fundamental. •

Dada una función autosimilar ρ no es trivial decidir si genera una función de escala $\phi = \rho * a$. La secuencia causal g que realiza la relación de doble escala de ϕ siempre puede calcularse usando (27 - 29). Más aún, siempre puede elegirse a de modo que g sea finita o de rápido decaimiento, independientemente de la función ρ. Observar que esta condiciones son necesarias para una función de multiescala [6]. Pero no podemos asegurar las condiciones $(E2)$ y $(E3)$, que dependen de ρ. Una condición suficiente para el caso $r = 1$ es discutido en [1]. No conocemos por ahora un resultado general para el caso multidimensional.

Sí podemos encontar ejemplos positivos en este sentido, en el caso de las funciones spline deficientes, generadas por potencias truncadas x_+^k. Mencionemos en especial lugar, las spline de Hermite, que como bien sabemos generan esquemas de análisis multirresolución.

Expongamos el segundo resultado, que afirma que todo esquema multiresolución es generado por alguna función autosimilar:

Teorema 2.*Sea ϕ una función de escala causal y propia, de multiplicidad r. Entonces existe una única función $\rho \in S_c(\phi)$, causal autosimilar y propia, de multiplicidad r, tal que, $\rho(x) = \phi(x)$ en el intervalo $(0, 1]$ y $S(\rho) = S(\phi)$.*

Demostración También aquí el resultado es un corolario de los previos. Si g es la secuencia que realiza la relación de multiescala de ρ, con $g(0)$ no singular, definamos el factor matricial $\Lambda = g(0)$. A partir de $b(0) = I$, la identidad, generamos la secuencia causal b, por medio de las fórmulas (27-29), y obtenemos $\rho = \phi * b$. Claramente, esta función satisface lo requerido, particular $\rho(x) = \phi(x)$ en el intervalo $(0, 1]$. Esto asegura también la unicidad. •

Este teorema nos dice que todo análisis de multirresolución de multiplicidad r y bajo las hipótesis dadas, es generada por un función radial de la misma multiplicidad. En otras palabras, cada función de escala de multiplicidad r, causal y propia, tiene asociada una única función radial con las mismas propiedades. Por otra parte, esta relación involucra sólo a una particular clase de funciones autosimilares.

Quedan abiertos varios problemas. Como hemos señalado, una cuestión es exponer condiciones necesarias y suficientes para la admisibilidad de una funcin causal y autosimilar de multiplicidad r. Otro problema consiste en extender los resultados al caso no causal.

Finalmente mencionemos la cuestión de las funciones de multiplicidad p generadas por funciones autosimilares de multiplicidad $r > p$. En este caso, es posible encontrar estructuras de multiresolución incluídas unas en otras, tal como se expone en [8].

Esta temática queda abierta a futuros desarrollos.

Referencias:

[1] M. Unser and T. Blu, *Wavelets, Fractals, and Radial basis Functions* , Proc. IEEE Transactions on Signal Procesing, Vol. 50 No. 3, March 2002.

[2] M. Unser, T. Blu, *'Wavelets and Radial Basis Functions: a Unifying Perspective'*, Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, M. Unser, A. Aldroubi and A. Laine Eds., vol. 3813, San Diego, 2000.

[3] D. Zhou, *Two-Scale Homogeneous Functions in Wavelet Analysis* ,The Journal of Fourier Analysis ans Applications., Vol. 8 No. 6, 2002.

[4] C.Cabrelli, C. Heil and U. Molter, *Acuracy of lattice traslates of sevaral multidimesional refinable functions* ,J. Approx. Theory, 95, 1998.

[5] I. Schonberg , *'Cardinal Spline Interpolation'*, SIAM, Philadelphia, 1993.

[6]L. Hervé, *Multiresolution Analysis of multiplicity d: Applications to Dyadic Interpolation'*, Appl. Comp. Harmonic Analysis, No 1, 1994.

[7] A. Aldroubi,*Oblique and hierarchical multiwavelet bases*,Appl. Comp. Harmonic Analysis, Vol. 4, No. 3 , 1997.

[8]A. Cammilleri and E. Serrano, *Embeeding Multiresolution spline Structures* , Wavelets: Applications in Signal and Image Processing IX, (SPIE 2001, San Diego, California, 2001), A. Laine, A. Aldroubi and M. Unser Eds., 2001.

Esc. de Ciencia y Tecnología - Universidad de San Martín

Dep Mat- FCEyN - Universidad de Buenos Aires