ACTAS DEL VII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2003) , Páginas 35–38

CLAUSURA CONVEXA DE CONJUNTOS AUTOSEMEJANTES, UN EJEMPLO EN $\mathbb{R}^3$.

MARIANO FERRARI

ABSTRACT. P. Panzone [5] caracterized the convex hull of a self similar set in $\mathbf{R}^2$. In this note we prove, by means of a example, that this caracterization is not valid in $\mathbf{R}^3$.

Si $K \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto compacto diremos que K es un conjunto autosemejante definido por similitudes si existe un conjunto finito I y una familia de similitudes $\{\varphi_i\}_{i\in I}$

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = r_i|x-y| \quad , \quad r_i < 1\,,$$

de modo que

$$K = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(K)\,. \tag{1}$$

Usaremos la notación $\varphi_i(x) = r_i\,A_i(x) + a_i$ donde A_i es una transformación lineal ortogonal, esto es $\det A_i = \pm 1$, y a_i es un punto de $\mathbb{R}^3$.

Es importante destacar que para para cualquier familia de contracciones existe un único conjunto compacto que verifica (1), ver [3], [7].

Por distintas razones al momento de calcular la dimensión o la medida de Hausdorff de tales conjuntos, es importante conocer su clausura convexa, que notaremos $\mathcal{C}(K)$, ver [4], [6]. Esto fue hecho, en parte, para conjuntos autosemejantes en $\mathbb{R}^2$, para poder explicarlo necesitamos las siguientes definiciones.

Diremos que un punto $p \in \mathcal{C}(K)$ es un *punto extremo* si no existen $x, y \in \mathcal{C}(K)$, $x, y \neq p$, tales que p está contenido en el segmento $[x, y]$. Es simple observar además que un punto de este tipo es en realidad un punto de K, y sabemos que un conjunto convexo coincide con la clausura convexa de sus puntos extremos, ver Eggleston [2].

Dados un punto $p \in \mathbb{R}^3$, un versor v, $|v| = 1$ y un ángulo θ, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; consideraremos el cono de vértice p, dirección v y ángulo θ:

$$\mathrm{Con}(p, v, \theta) = \Big\{x : \frac{\langle x-p, v\rangle}{|x-p|} \ge \cos\theta\Big\}.$$

Aquí $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $|\cdot|$ representan el producto escalar y la norma usual en $\mathbb{R}^3$. Observar que cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Con}(p, v, \theta)$ es un semiespacio.

Para un punto extremo p definimos

$$\theta(p) = \inf\{\theta : \text{ existe un versor } v \text{ tal que } \mathcal{C}(K) \subseteq \mathrm{Con}(p, v, \theta)\}\,.$$

Es simple ver que, de hecho, el infimo anterior es en realidad un mínimo, esto es, existe versor $v(p)$ y un cono $Q(p) = \mathrm{Con}(p, v(p), \theta(p))$ tal que $K \subseteq Q(p)$, además este cono es único si $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Por último, diremos que un punto extremo p es *localmente lineal* si es el único punto extremo en un entorno de p, esto es, si no existe una sucesión de puntos extremos $\{p_i\}$, $p_i \neq p$, que converge a p.

P. Panzone [5] mostró el siguiente Teorema que caracteriza los puntos extremos de conjuntos autosemejantes en $\mathbb{R}^2$.

Teorema. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto autosemejante definido por similitudes tales que* $\det(A_i) = 1$ *para todo i. Si $p \in K$ es un punto extremo tal que $\theta(p) < \frac{\pi}{2}$ entonces p es localmente lineal.*

Contraejemplo.

Mostaremos a continuación, a través de un ejemplo, que esta caracterización no es válida en $\mathbb{R}^3$.

Sea $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, consideremos los puntos de $\mathbb{R}^3$, $0 = (0,0,0)$, $p = (1,0,0)$; los versores $u_0 = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\alpha, 0)$, $u_1 = (-\cos\alpha, \mathrm{sen}\alpha, 0)$; y los conos $C_0 = \mathrm{Con}(0, u_0, \alpha)$, $C_1 = \mathrm{Con}(p, u_1, \alpha)$ (ver figura). Observar que si S es la reflexión sobre el plano $x = \frac{1}{2}$ entonces $C_1 = S(C_0)$.

Consideremos ahora una transformación ortogonal T que deje fijo u_0 y sea una rotación irracional sobre el plano ortogonal a u_0. Esto es, en la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\{u_0, v_0, w_0\}$, donde $v_0 = (-\mathrm{sen}\alpha, \cos\alpha, 0)$ y $w_0 = (0,0,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(u_0) &= u_0, \\ T(v_0) &= \cos(\theta)v_0 + \mathrm{sen}(\theta)w_0, \\ T(w_0) &= -\mathrm{sen}(\theta)v_0 + \cos(\theta)w_0, \end{aligned}$$

donde $\theta = \beta 2\pi$, $0 < \beta < 1$ un número irracional. Observemos que $T(C_0) = C_0$. Sea ahora T' la transformación afín dada por $T' = STS$, entonces $T'(C_1) = C_1$ (sólo necesitamos de la transformación T' que deje fijo al cono C_1). Consideremos las similitudes

$$\varphi_1(x) = rT(x), \qquad \varphi_2(x) = rT'(x),$$

donde $r < \frac{1}{2}$, y sea K el conjunto autosemejante tal que

$$K = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(K),$$

donde $I = \{1, 2\}$. Observemos que el conjunto convexo $C = C_0 \cap C_1 = \{(x,y,z) \in C_0 : x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x,y,z) \in C_1 : x \geq \frac{1}{2}\}$, verifica $\varphi_i(C) \subseteq C$, por lo que $\mathcal{C}(K) \subseteq C$. Además sabemos que todo punto $x \in K$ puede escribirse de la forma

$$x = \lim_{n \to \infty} \varphi_{\omega_1 \ldots \omega_n}(C) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_{\omega_1 \ldots \omega_n}(C),$$

para algún $\omega \in I^\infty$, ver [1], [7]. Aquí I^∞ representa el conjunto de las sucesiones infinitas $\omega = \omega_1 \dots \omega_n \dots$, $\omega_i = 1, 2$; y para cualquier palabra finita $\omega_1 \dots \omega_n$ notaremos $\varphi_{\omega_1 \dots \omega_n} = \varphi_{\omega_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\omega_n}$.

Lema. *Sea $x \in K$, si $x \in \partial C_0$ entonces $x \in [0, \varphi_\omega(p)]$, para alguna palabra $\omega = 11 \dots 1$.*

Demostración : Sabemos que existe un $\omega \in I^\infty$ tal que $x = \cap_{n=1}^\infty \varphi_{\omega_1 \dots \omega_n}(C)$, si $\omega_i = 1$ para todo i entonces $x = 0$. Supongamos que existe $k \geq 1$ tal que $\omega_i = 1$ para todo $i \leq k$, $\omega_{k+1} = 2$. Luego $x \in \varphi_{11 \dots 12}(C)$, esto es, existe un $y \in \varphi_2(C)$ tal que

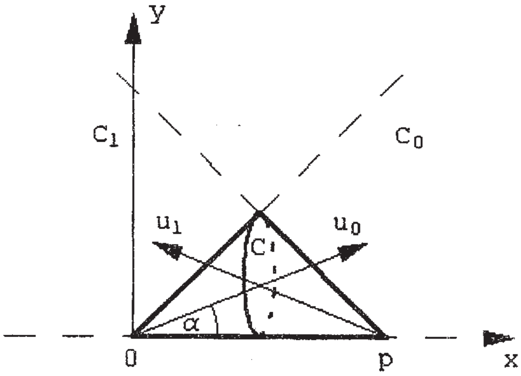
$$x = \varphi_{11 \dots 1}(y) \,. \tag{2}$$

Ya que x está en la frontera de C_0, el punto y también debe estar en la frontera de C_0. Observemos entonces que, como el radio de contración de φ_2, r, es menor que $\frac{1}{2}$, $\varphi_2(C) \subseteq \{(x, y, z) \in C_1 : x > \frac{1}{2}\}$, y en consecuencia $\varphi_2(C) \cap \partial C_0 \subseteq [0, p]$. Luego $y \in [0, p]$ y el lema sigue entonces de (2). ■

Teorema. *0 es un punto extremo de K, $\theta(0) = \alpha < \frac{\pi}{4}$ y 0 no es localmente lineal.*

Demostración : Consideremos la sucesión de puntos de K, $\{\varphi_{\underbrace{1 \dots 1}_{k}}(p)\}_{k=0}^\infty$, estos puntos pertenecen a la frontera de C_0 y además, rotan irracionalmente sobre la frontera de C_0 acercándose a 0 por lo que $Q(0) = C_0$ y $\theta(0) = \alpha$.

Veremos además que estos puntos son todos puntos extremos, de lo que resulta que 0 no es localmente lineal. Supongamos que $q = \varphi_{\underbrace{1 \dots 1}_{k}}(p)$ no es un punto extremo de K y sea H un plano soporte de C_0 que contiene a q, esto es un plano tal que C_0 está contenido en uno de los semiespacios determinados por H. Tal plano existe por ser C_0 un conjunto convexo, ver [2]. H es también un plano soporte de $\mathcal{C}(K)$ y observemos que $H \cap \mathcal{C}(K) \subseteq H \cap C_0 = L$, donde L es la semirrecta que empieza en 0 y contiene a q, es decir que $H \cap \mathcal{C}(K)$ es un segmento $[0, q']$. Sabemos que los puntos extremos de $\mathcal{C}(K)$ contenidos en H coinciden con los puntos extremos de $H \cap \mathcal{C}(K)$. En consecuencia q' es un punto extremo de K por lo que $q \neq q'$ y $q \in [0, q']$. Por ser un punto extremo $q' \in K$, además $q' \in \partial C_0$ y resulta del Lema que $q' \in [0, \varphi_{\underbrace{1 \dots 1}_{h}}(p)]$ para algún h. Tendríamos entonces que $[0, \varphi_{\underbrace{1 \dots 1}_{k}}(p)] \subseteq [0, \varphi_{\underbrace{1 \dots 1}_{h}}(p)]$ para $k \neq h$, lo que es imposible ya que la rotación de φ_1 es un múltiplo irracional de 2π. ■



References

[1] G.A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry.* Spriger-Verlag, 1990.

[2] H.G. Eggleston. *Convexity.* Cambridge University Press, 1969.

[3] K. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry.* John Wiley & Sons, 1997.

[4] P. Panzone. On the measure of self-similar sets. *Rev. de la Unión Matemática Argentina*, 38:48–87, 1992.

[5] P. Panzone. A note on the convex hull of self similar sets. In *Actas del 2^o congreso "Dr. A. A. R. Monteiro"*, pages 57–64. Instituto de Matemática de Bahía Blanca (UNS-CONICET), 1993.

[6] P. Panzone. On the measure of self-similar sets II. *Rev. de la Unión Matemática Argentina*, 40:83–100, 1996.

[7] M. Yamaguti, M. Hata, and J. Kigami. *Mathematics of Fractals.* Univ. Bangalore Press, 1997.

E-mail address: mferrari@@criba.edu.ar