FORMULACIÓN DE LOS MODELOS LOGÍSTICOS DE LA TEORÍA DE RESPUESTA AL ÍTEM DESDE EL ENFOQUE DE LOS MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

JANINA MICAELA ROLDAN AND MARÍA CRISTINA MARTÍN

RESUMEN. En diferentes áreas de investigación se trabaja con conjuntos de datos que están relacionados con variables no observables en forma directa (variables latentes). Los modelos estadísticos que relacionan variables respuesta de tipo categóricas y variables latentes de tipo continuas, son denominados modelos de rasgos latentes (MRL). Los MRL se enmarcan dentro de dos grandes teorías: la teoría clásica de los test (TCT) y la teoría de respuesta al ítem (TRI). La TRI surgió como alternativa a la TCT y es la teoría que domina en la actualidad. Aunque la TRI es parte de la psicometría, es una teoría que se aplica en diversas áreas como educación, sociología, economía, *marketing*, ingeniería, entre otras. Los modelos TRI pretenden medir una variable que es subyacente a los datos observados. En particular, cuando la variable respuesta es de tipo binaria y se pretende medir una única variable latente se trabaja con los modelos TRI binarios unidimensionales, los cuales admiten diversas formulaciones, de acuerdo a la función matemática que se adopte para modelar la probabilidad de respuesta correcta. Más específicamente, al utilizar la conocida función de enlace logit, los modelos se denominan modelos logísticos de x parámetros, con $x = 1,2,3$.

Numerosas investigaciones han sido realizadas en relación a los fundamentos y aplicaciones de la TRI; sin embargo, no se han encontrado, en la literatura, demasiados trabajos vinculados al tratamiento matemático-estadístico de los modelos TRI, y en particular, de los modelos TRI binarios unidimensionales. Atendiendo a esta necesidad, en este trabajo se desarrollan las bases matemático-estadísticas en las que se fundamentan los modelos TRI binarios unidimensionales y especialmente los modelos logísticos de 1, 2 y 3 parámetros, brindando la formulación de los mismos a partir de la teoría de los modelos lineales generalizados (MLG).

1. MODELOS DE RASGOS LATENTES

Definición 1.1. Se denominan *variables latentes* a las variables que no se pueden observar de manera empírica, y *variables manifiestas* a aquellas que pueden ser observadas en forma directa.

Definición 1.2. Se denomina *modelo de variable latente (MVL)* al sistema $(\mathbf{Y},\boldsymbol{\Theta})$ que vincula $\mathbf{Y}$ con $\boldsymbol{\Theta}$, donde $\mathbf{Y} = (Y_1,Y_2,\ldots,Y_p)$, con $p \in \mathbb{N}$, es un vector de variables manifiestas, también llamadas ítems o indicadores, y $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q)$, con $q \in \mathbb{N}$, es un vector formado por variables latentes, igualmente llamadas rasgos o habilidades.

Notación:

- Y: variable aleatoria manifiesta.
- $\mathbf{Y}$: vector de variables aleatorias manifiestas.
- θ: variable aleatoria latente.
- $\boldsymbol{\Theta}$: vector de variables aleatorias latentes.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 62J12.

Observación 1.3. Existen varios tipos de modelos de variables latentes que se distinguen por el nivel de medición de las variables observadas y las suposiciones realizadas sobre el nivel de medición de las variables latentes (Bartholomew *et al.* [1]). La Tabla 1 muestra una clasificación de los modelos de variables latentes, de donde se observa que, en particular, cuando se trabaja con variables manifiestas categóricas y variables latentes de tipo cuantitativas continuas, se utilizan los denominados modelos de rasgos latentes.

TABLA 1. Clasificación de los modelos de variables latentes (Bartholomew *et al.* [1, Table 7.1])

Variables latentes	Variables observadas	
	Métrica (intervalo o razón)	Categoría (nominal/ordinal)
Métrica (intervalo o razón)	*Análisis factorial*	*Análisis de rasgos latentes*
Categoría (nominal/ordinal)	*Análisis de perfil latentes*	*Análisis de clases latentes*

Definición 1.4. Se denomina *modelo de rasgos latentes (MRL)* al modelo de variable latente $(\mathbf{Y},\mathbf{\Theta})$ que relaciona $\mathbf{Y}$ con $\mathbf{\Theta}$, donde $\mathbf{Y} = (Y_1,Y_2,\ldots,Y_p)$, con $p \in \mathbb{N}$, es una secuencia de variables manifiestas categóricas y $\mathbf{\Theta} = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q)$, con $q \in \mathbb{N}$, un vector de variables latentes medidas en escala de intervalo o razón.

Observación 1.5. Según Bartholomew *et al.* [1], los objetivos para la aplicación del modelo $(\mathbf{Y},\mathbf{\Theta})$ presentado en la Definición 1.4 son:

- indagar acerca de las relaciones entre las respuestas observadas;
- determinar si las relaciones anteriores pueden ser explicadas por una pequeña cantidad de variables latentes;
- asignar una puntuación a cada examinado para cada variable latente en función de las respuestas observadas.

Definición 1.6. El modelo de rasgos latentes $(\mathbf{Y},\mathbf{\Theta})$ se denomina *modelo de rasgo latente binario (MRLB)* si la variable manifiesta Y_j, con $j = 1,\ldots,p$, puede tomar dos valores posibles: 1 (éxito) con probabilidad $\pi_j(\mathbf{\Theta})$ y 0 (fracaso) con probabilidad $1-\pi_j(\mathbf{\Theta})$, siendo $0 \le \pi_j(\mathbf{\Theta}) \le 1$.

Observación 1.7. En un test dicotómico compuesto por p ítems respondido por n individuos, $\mathbf{Y}$ está formado por p variables manifiestas Y_j. La variable Y_j es una variable observada en n individuos y, por lo tanto, se cuenta con n variables aleatorias Y_{ij}, donde Y_{ij} representa la respuesta del individuo i al ítem j, por lo que $Y_j = (Y_{1j},\ldots,Y_{nj})'$, $j = 1,\ldots,p$.

Matricialmente, $\mathbf{Y}$ se puede representar como sigue:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \ldots & Y_{1j} & \ldots & Y_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \ldots & Y_{nj} & \ldots & Y_{np} \end{pmatrix}.$$

Observación 1.8. Sobre todo MRLB $(\mathbf{Y}, \mathbf{\Theta})$ se impone el supuesto de *independencia condicional*, lo que implica que las variables manifiestas no pueden estar correlacionadas condicionales a $\mathbf{\Theta}$, es decir, $\text{corr}(Y_j, Y_k|\mathbf{\Theta}) = 0$, para $j,k = 1,\ldots,p$ y $j \neq k$.

En un MRLB las variables latentes no son observadas; por lo tanto, el cumplimiento del supuesto de independencia condicional solo puede comprobarse indirectamente si se verifica que el modelo se ajusta a los datos. Se considera que un MRL se ajusta bien a los datos cuando la mayor parte de la relación entre las respuestas observadas es explicada por las variables latentes (Bartholomew *et al.* [1]).

Observación 1.9. Se dice que el MRLB $(\mathbf{Y}, \mathbf{\Theta})$ satisface el supuesto de *unidimensionalidad* si $\mathbf{\Theta}$ está formado por una única variable latente, es decir, $q = 1$.

La unidimensionalidad supone que las variables manifiestas (ítems) que constituyen un test deben medir solo un rasgo o habilidad latente, es decir, que las respuestas dadas a cada ítem deben estar en función de una única variable latente. Sin embargo, debido a que múltiples factores pueden afectar la respuesta dada por un individuo a un ítem, es difícil satisfacer el supuesto de unidimensionalidad en su totalidad. Por lo tanto, en los modelos unidimensionales es suficiente que exista una variable latente dominante que sea útil para explicar las respuestas de los sujetos (Hambleton y Swaminathan [4]).

En el caso de que el modelo asuma el supuesto de unidimensionalidad, se verificará la independencia local porque significa que la respuesta a un ítem solo depende de sus parámetros y de la habilidad del individuo y no está condicionada por el orden de presentación de los ítems o por las respuestas dadas (Ponsoda *et al.* [8]).

Observación 1.10. El MRLB se basa en un modelo de regresión para datos dicotómicos, pero su tratamiento es más complicado pues no se tiene una única variable manifiesta (ítems) sino p, que no están correlacionadas condicionalmente a las variables explicativas, denominadas, en este contexto, variables latentes. Sumado a esto, las variables latentes no se pueden observar de manera directa sino que son subyacentes y, por lo tanto, se deben estimar.

Para relacionar los ítems con las variables latentes del MRLB se debe realizar una regresión de cada variable manifiesta Y_j sobre las variables latentes contenidas en el vector $\mathbf{\Theta}$. Esta regresión es el valor esperado de Y_j condicional a $\mathbf{\Theta}$, denotado por $E(Y_j|\mathbf{\Theta})$ y, debido a que las variables Y_j son de tipo binarias, $E(Y_j|\mathbf{\Theta}) = P(Y_j = 1|\mathbf{\Theta}) = \pi_j(\mathbf{\Theta})$. La variable Y_j está compuesta por n variables dicotómicas Y_{ij}, con $i = 1,\ldots,n$, correspondientes a los n individuos que responden un test, en donde la probabilidad condicional de que Y_{ij} sea igual a 1 dados los valores de las variables latentes $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ para el individuo i se denota π_{ij}, es decir, $P(Y_{ij} = 1|\mathbf{\Theta} = (\theta_{i1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{iq})) = \pi_{ij}$.

Definición 1.11. Considerando un test dicotómico con p ítems respondido por n individuos, el MRLB $(\mathbf{Y}, \mathbf{\Theta})$ se define a partir de la regresión de cada Y_j, $j = 1,\ldots,p$, sobre las variables latentes como sigue:

MRLB

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la respuesta del individuo } i \text{ al ítem } j \text{ es correcta,} \\ 0, & \text{si la respuesta del individuo } i \text{ al ítem } j \text{ es incorrecta.} \end{cases}$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}' \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{j}} = \alpha_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_{jk} \theta_{ik}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde
  - η_{ij} es el predictor lineal latente,
  - $\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}' = (1, \theta_{i1}, \dots, \theta_{iq})$, con θ_{ik} el valor de la k-ésima variable latente para el individuo i,
  - $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{j}} = (\alpha_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jq})'$ es un vector de parámetros desconocidos que se denominan coeficientes de regresión.
- **Función de enlace:**

$$g(\pi_{ij}) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Observación 1.12. La especificación del modelo MRLB se completa detallando los supuestos de los que depende como sigue (Bartholomew *et al.* [1]):

- El MRLB satisface el supuesto de *independencia condicional*, puesto que las respuestas a los p ítems observados son independientes condicionalmente a las variables latentes.
- Las variables latentes $\theta_1, \dots, \theta_q$ son independientes y se distribuyen normal estándar, es decir, $\theta_k \sim N(0,1)$ para todo $k = 1, \dots, q$.
- Una función de enlace debe ser elegida de manera tal que $g(\pi_{ij}) = \alpha_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_{jk} \theta_{ik}$.

2. Modelos TRI binarios unidimensionales

Un caso singular de los MRLB se presenta cuando se considera una única variable latente. Estos modelos particulares han sido estudiados en el marco de dos grandes teorías psicológicas: la teoría clásica de los test (TCT) (Rasch [9]) y la teoría de respuesta al ítem (TRI) (Birnbaum [2], Lord [5]). El enfoque clásico predominó en el siglo XX, pero presenta serias limitaciones; la principal radica en que las características del test y las puntuaciones verdaderas de los examinados no se pueden analizar de manera separada. La TCT considera al test en su conjunto e impide analizar particularmente a los ítems que lo conforman. Por lo tanto, resulta imposible realizar inferencias sobre el comportamiento de los examinados en un ítem determinado, por lo que no se puede estimar la probabilidad de que una persona responda correctamente a un ítem.

Frente a los inconvenientes que presenta el enfoque clásico surge la TRI, como alternativa a la TCT. La TRI es la teoría que domina en la actualidad y representa el mayor avance en la medición psicológica y educativa en los últimos años (Muñiz y Hambleton [7]). Sin embargo, la TRI no es una teoría contrapuesta a la TCT sino una teoría complementaria, dado que brinda soluciones a varios de los problemas de la teoría clásica, proporciona mejores respuestas a los planteamientos de esta y presenta aspectos que no se podrían abordar desde la TCT (Muñiz [6]).

Definición 2.1. El *modelo de rasgos latentes binario unidimensional (MRLBU)* es un MRLB que considera una única variable latente, es decir, $\mathbf{\Theta} = \theta_1$. Se considera un test dicotómico, conformado por p ítems, que responden n individuos, y se llama $\theta_1 = \theta$; entonces, el MRLBU se denota $(\mathbf{Y}, \theta)$ y se define a partir de las componentes de la regresión de cada Y_j sobre θ, $j = 1, \ldots, p$, como sigue:

MRLBU

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \boldsymbol{\theta_i'}\boldsymbol{\beta_j} = \alpha_j + \beta_j\theta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

  donde
  - η_{ij} es el predictor lineal latente,
  - θ_i es la habilidad latente del individuo i,
  - $\boldsymbol{\theta_i'} = (1, \theta_i)$,
  - $\boldsymbol{\beta_j} = (\alpha_j, \beta_j)'$.
- **Función de enlace:**

$$g(\pi_{ij}) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Observación 2.2. La especificación del modelo MRLBU se completa detallando los supuestos de los que depende como sigue:

- EL MRLBU satisface el supuesto de unidimensionalidad, puesto que mide una única variable latente.
- El MRLBU satisface el supuesto de independencia condicional, debido al cumplimiento de la unidimensionalidad.
- $\theta \sim N(0, 1)$.
- Una función de enlace debe ser elegida de manera tal que sea monótona en función de θ, definida de $\mathbb{R} \to [0, 1]$, doblemente diferenciable y $g(\pi_{ij}) = \alpha_j + \beta_j\theta_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Observación 2.3. En el contexto de la teoría de respuesta al ítem, el MRLBU se conoce como *modelo TRI binario unidimensonal*.

Observación 2.4. $\pi_j(\theta)$ es una función matemática que modela el comportamiento de la probabilidad de respuesta correcta para cada ítem j, con $j = 1, \ldots, p$, según la habilidad o rasgo latente de cada individuo. En el marco de la TRI esta función se denomina curva característica del ítem (CCI).

Se debe adoptar una función matemática (enlace) para conformar la CCI y, de esta manera, completar la definición del MRLBU. Según el enlace elegido, existen diferentes modelos TRI binarios unidimensionales. La función con la que se trabaje debe ser monótona creciente en el rasgo latente y asignarle el rango $[0, 1]$ al rango $(-\infty; +\infty)$ (Bartholomew *et al.* [1]). Para poder cumplir con las condiciones anteriores es necesario transformar la probabilidad de respuesta. En general, se han investigado dos tipos de funciones matemáticas para la CCI: los enlaces logit y probit, los cuales se definen de $\mathbb{R} \to (0,1)$.

La función logística se caracteriza por ser matemáticamente más sencilla de utilizar y de interpretar. Según Lord [5], los individuos con niveles de habilidad altos prácticamente nunca deberían responder de manera incorrecta un ítem muy fácil; sin embargo, en la realidad dicho individuo puede cometer un error descuidado y, como la función logística se acerca a sus asíntotas menos rápido que la ojiva normal, tales errores descuidados serán menos agresivos para el modelo que utilice el enlace logit que para el modelo determinado a partir del enlace probit. Por estos motivos, y dado que las estimaciones de los parámetros mediante la distribución normal y la logística no difieren sustancialmente, los modelos más utilizados son los originados a partir del enlace logit.

En lo que sigue, se definen las componentes del modelo logístico de 2 parámetros y se presentan sus casos particulares: el modelo logístico de 1 parámetro y el modelo de Rasch. Seguidamente, se contruye la CCI del modelo logístico de 3 parámetros y se detallan las componentes del MLG que lo definen.

Definición 2.5. El modelo TRI binario unidimensional $(\mathbf{Y},\theta)$ que adopta la función de enlace logit se denomina *modelo logístico de 2 parámetros (ML2).*

Resultado 2.6. La CCI del ML2 para el ítem j es

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j+\beta_j\theta}}{1+e^{\alpha_j+\beta_j\theta}}, \quad j=1,\dots,p. \tag{1}$$

Demostración. La relación entre η_j y $\pi_j(\theta)$ para el ítem j está dada por

$$g(\pi_j(\theta)) = \eta_j(\theta), \quad j=1,\dots,p.$$

Si se considera el enlace logit se tiene

$$\text{logit}(\pi_j(\theta)) = \eta_j(\theta), \quad j=1,\dots,p.$$

Entonces, por definición de la función logística, es

$$\log\frac{\pi_j(\theta)}{1-\pi_j(\theta)} = \eta_j(\theta),$$

y, por ende,

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\eta_j(\theta)}}{1+e^{\eta_j(\theta)}},$$

que, por la Definición 2.1, constituye la ecuación de la CCI del ML2, es decir,

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j+\beta_j\theta}}{1+e^{\alpha_j+\beta_j\theta}}, \quad j=1,\dots,p. \qquad \square$$

Observación 2.7. El ML2 es el más conocido dentro de la TRI y es muy utilizado en diferentes áreas cuando se trabaja con datos binarios. En el marco de la TRI, la CCI queda determinada no solo al adoptar una función matemática que conforme la curva, sino también al determinar los *parámetros* que la configuran. Estos se denominan *parámetro de discriminación* y *parámetro de dificultad* del ítem, y se especifican a partir de los coeficientes de regresión α_j y β_j, $j=1,\dots,p$.

Definición 2.8. Se denomina *parámetro de discriminación*, y se denota a_j, al valor proporcional a la pendiente de la recta tangente a la CCI del ítem j, $j=1,\dots,p$, en el punto de inflexión de $\pi_j(\theta)$.

Observación 2.9. El parámetro de discriminación indica el grado en el que la respuesta al ítem varía según la habilidad del individuo (Lord [5]). Los ítems con mayor valor en el parámetro de discriminación son más útiles para discriminar a los individuos en distintos niveles de habilidad que los ítems con menor valor en el parámetro de discriminación (Cortada de Kohan [3]).

Resultado 2.10. El coeficiente de regresión β_j y el parámetro de discriminación a_j son iguales, para todo $j = 1, \ldots, p$.

Demostración. Por la ecuación (1) la CCI del ML2 para cada ítem j, con $j = 1, \ldots, p$, es

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}.$$

Tomando la primera derivada $\pi_j'(\theta)$ respecto de θ, se tiene

$$\begin{aligned}
\pi_j'(\theta) &= \frac{e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot \beta_j \cdot (1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}) - e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot \beta_j}{(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta})^2} \\
&= \frac{\beta_j \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta} + \beta_j \left(e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2 - \beta_j \left(e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2}{\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2},
\end{aligned}$$

de donde resulta

$$\pi_j'(\theta) = \frac{\beta_j \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta}}{\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2}.$$

La segunda derivada, $\pi_j''(\theta)$, de la CCI es

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot \left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2 - \beta_j^2 \cdot \left(e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^2 \cdot 2\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)}{\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^4}$$

o, equivalentemente,

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot \left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta} - 2e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)}{\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^4}.$$

De esta manera, la segunda derivada de la CCI queda determinada por la ecuación

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta} \cdot \left(1 - e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)}{\left(1 + e^{\alpha_j+\beta_j\theta}\right)^3}.$$

Luego, el punto de inflexión se obtiene a partir de la igualdad $\pi_j''(\theta_0) = 0$, por lo que

$$\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} = 0 \qquad \text{o} \qquad 1 - e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} = 0,$$

de donde se tiene que

$$1 = e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0}.$$

En consecuencia,

$$\alpha_j + \beta_j\theta_0 = 0.$$

Entonces, existe un posible punto de inflexión en

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Para determinar si efectivamente θ_0 es un punto de inflexión, se debe analizar si cambia la concavidad de la CCI en θ_0. Para ello, se estudia el comportamiento de la función en los puntos $-\frac{\alpha_j}{\beta_j}-1$ y $-\frac{\alpha_j}{\beta_j}+1$. La imagen de estos valores dada por la segunda derivada de la CCI es

$$\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}-1\right)=\frac{\beta_j^2e^{-\beta_j}\left(1-e^{-\beta_j}\right)}{\left(1+e^{-\beta_j}\right)^3}, \qquad j=1,\ldots,p;$$

$$\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}+1\right)=\frac{\beta_j^2e^{\beta_j}\left(1-e^{\beta_j}\right)}{\left(1+e^{\beta_j}\right)^3}, \qquad j=1,\ldots,p.$$

Para determinar el signo de la CCI es necesario considerar el comportamiento de β_j, $j=1,\ldots,p$:

- Si $\beta_j<0$:

$$\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}-1\right)<0 \quad \text{y} \quad \pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}+1\right)>0,$$

  de donde se infiere que la concavidad cambia de negativa a positiva en θ_0.
- Si $\beta_j>0$:

$$\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}-1\right)>0 \quad \text{y} \quad \pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}+1\right)<0,$$

  de donde se deduce que la concavidad se modifica de positiva a negativa en θ_0.

Luego, se concluye que en $\theta_0=-\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ existe un punto de inflexión y, por consiguiente, es el punto donde la pendiente de la recta tangente a $\pi_j(\theta)$ es máxima.

Por último, teniendo en cuenta la Definición 2.8, se tiene que

$$a_j=k\cdot\pi_j'\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right), \qquad j=1,\ldots,p, \quad k\in\mathbb{R},$$

de donde

$$\pi_j'\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)=\frac{\beta_j\cdot e^{\alpha_j+\beta_j\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)}}{\left(1+e^{\alpha_j+\beta_j\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)}\right)^2}=\frac{\beta_j}{4}, \quad j=1,\ldots,p.$$

Luego,

$$a_j=k\cdot\frac{\beta_j}{4}.$$

Considerando $k=4$, se obtiene

$$a_j=\beta_j, \quad j=1,\ldots,p.$$ □

Definición 2.11. El *parámetro de dificultad*, denotado por b_j, es un parámetro de localización y se define como el valor de la variable latente para el cual la probabilidad de responder correctamente el ítem j es 0,5, $j=1,\ldots,p$.

Observación 2.12. El parámetro de dificultad indica el grado de dificultad del ítem. Para valores altos de este parámetro un individuo deberá tener un nivel elevado de habilidad para responder correctamente el ítem con probabilidad 0,5 (Lord [5]).

Resultado 2.13. La relación entre los coeficientes de regresión y el parámetro de dificultad es $b_j=-\frac{\alpha_j}{\beta_j}$, $j=1,\ldots,p$.

Demostración. Si $\pi_j(\theta_0) = 0{,}5$ (Definición 2.11) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0}}{1+e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0}} &= 0{,}5\\
e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} &= 0{,}5\cdot(1+e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0})\\
e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} &= 0{,}5+0{,}5e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0}\\
e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0}-0{,}5e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} &= 0{,}5\\
0{,}5e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} &= 0{,}5\\
e^{\alpha_j+\beta_j\theta_0} &= 1,
\end{aligned}$$

de donde

$$\alpha_j+\beta_j\theta_0 = 0,$$

y entonces

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_j}{\beta_j},$$

por lo que el parámetro de dificultad es

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}. \qquad \square$$

Propiedad 2.14. El predictor lineal latente del ML2 es

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j), \qquad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,p.$$

Demostración. El predictor lineal del MRLBU es, por la Definición 2.1,

$$\eta_{ij} = \alpha_j+\beta_j\theta_i, \qquad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,p. \tag{2}$$

Del Resultado 2.13 se tiene que

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j},$$

o equivalentemente, por el Resultado 2.10,

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{a_j},$$

de donde se tiene que

$$-b_j\cdot a_j = \alpha_j. \tag{3}$$

Reemplazando (3) en la ecuación (2) se establece el predictor latente η_{ij} del ML2 mediante la ecuación

$$\eta_{ij} = -b_j\cdot a_j + a_j\theta_i, \qquad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,p;$$

es decir,

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j), \qquad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,p. \qquad \square$$

Definición 2.15. Para cada Y_j, $j = 1, \ldots, p$, las componentes que definen el ML2 son:

ML2

- **Componente aleatoria:**
$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Componente sistemática:**
$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Función de enlace:**
$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 2.16. La CCI del ML2 para el ítem j, con $j = 1, \ldots, p$, es la función
$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}}$$
o, equivalentemente,
$$\pi_j(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-a_j(\theta - b_j)}}.$$

Definición 2.17. Se denomina *modelo logístico de 1 parámetro (ML1)* al ML2 $(\mathbf{Y}, \theta)$ que asume que el parámetro de discriminación a es el mismo en todas las CCI correspondientes a cada ítem j, con $j = 1, \ldots, p$, y que el parámetro de dificultad b puede diferir en las CCI.

Corolario 2.18. De la Definición 2.17 se concluye que el predictor latente del ML1 es
$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Definición 2.19. Para cada Y_j, $j = 1, \ldots, p$, las componentes que definen el ML1 son:

ML1

- **Componente aleatoria:**
$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Componente sistemática:**
$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Función de enlace:**
$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 2.20. La CCI del ítem j, para $j = 1, \ldots, p$, queda expresada por la ecuación
$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a(\theta - b_j)}}{1 + e^{a(\theta - b_j)}}.$$

Definición 2.21. El ML1 $(\mathbf{Y}, \theta)$ que considera que el parámetro de discriminación asume el valor 1 en todas las CCI correspondientes a cada ítem j, con $j = 1, \ldots, p$, se denomina *modelo de Rasch*.

Corolario 2.22. De la Definición 2.21 se deriva que el predictor latente del modelo de Rasch queda configurado por la siguiente ecuación:

$$\eta_{ij} = (\theta_i - b_j), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Definición 2.23. Para cada Y_j, $j = 1, \ldots, p$, las componentes que definen el modelo de Rasch son:

Modelo de Rasch

- **Componente aleatoria:**
$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Componente sistemática:**
$$\eta_{ij} = (\theta_i - b_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Función de enlace:**
$$\operatorname{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 2.24. La CCI del modelo de Rasch queda expresada por

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\theta - b_j}}{1 + e^{\theta - b_j}}, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Observación 2.25. En el modelo de Rasch la probabilidad de responder correctamente a un ítem depende únicamente de la dificultad del ítem y del nivel de habilidad del sujeto en la escala latente; por consiguiente, la probabilidad de acertar el ítem aumentará cuanto mayor sea nivel de habilidad del sujeto y menor sea la dificultad del ítem.

Observación 2.26. En algunas situaciones, es muy común que las personas que contestan un test no conozcan la respuesta y, entonces, respondan de manera aleatoria, eligiendo al azar entre las opciones presentadas en cada ítem. En estos casos, se considera que la habilidad del examinado es muy baja; en consecuencia, la probabilidad de responder correctamente el ítem j cuando la habilidad asume un valor muy pequeño es una constante $c_j \in [0, 1)$, con $j = 1, \ldots, p$. Matemáticamente, se representa mediante el límite $\lim\limits_{\theta \to -\infty} \pi_j(\theta) = c_j$.

Es claro que c_j es una asíntota horizontal inferior de la función $\pi_j(\theta)$; por lo tanto, considerando la CCI del ML2 (Resultado 2.10), se tiene que

$$\pi_j(\theta) = c_j + \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}}.$$

En consecuencia, $\pi_j(\theta)$ toma valores en el intervalo $(c_j, 1 + c_j)$, lo cual no es admisible, puesto que la función $\pi_j : \mathbb{R} \to [0; 1]$. Para solucionar este problema, se multiplica la CCI del ML2 por la proporción $(1 - c_j)$ y se obtiene una nueva función

$$\pi_j(\theta) = c_j + (1 - c_j) \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}}. \tag{4}$$

Definición 2.27. La constante c_j se denomina *parámetro de pseudo-azar* del ítem j, $j = 1, \ldots, p$, y representa la probabilidad de responder correctamente el ítem j cuando la habilidad del examinado es muy baja.

Definición 2.28. El modelo TRI binario unidimensional $(\mathbf{Y}, \theta)$ que asume la función de enlace logit y cuya CCI coincide con la ecuación (4) se denomina *modelo logístico de 3 parámetros (ML3).*

Definición 2.29. Para cada Y_j, $j = 1, \ldots, p$, las componentes que definen el ML3 son:

ML3

- **Componente aleatoria:**
$$Y_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Componente sistemática:**
$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$
- **Función de enlace:**
$$\text{logit}\left(\frac{\pi_{ij} - c_j}{1 - c_j}\right) = \eta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 2.30. En el ML3, el parámetro de dificultad b_j del ítem j se corresponde con el nivel de habilidad en la escala latente, donde la probabilidad de responder correctamente el ítem j es $c_j + \frac{1-c_j}{2}$, es decir que $\pi_j(b_j) = c_j + \frac{1-c_j}{2}$, para $j = 1, \ldots, p$.

3. Conclusión

En este estudio se presentan las bases matemático-estadísticas de los modelos logísticos de 1, 2 y 3 parámetros, desarrollados en la teoría de respuesta al ítem (TRI), a partir del concepto de regresión lineal. Para ello, se trabaja con la teoría de los modelos lineales generalizados, dado que estos modelos consideran las regresiones lineales con variables de tipo dicotómicas.

En un principio se definen los modelos de variable latente y de rasgos latentes y, debido al interés de trabajar con ítems que asuman respuesta binaria o se codifiquen como tal, se explicitan los modelos de rasgos latentes binarios y, a partir de ellos, los que consideran una única dimensión, denominados modelos de rasgos latentes binarios unidimensionales. Estos últimos se han desarrollado en el contexto de la TRI, y por tal motivo son conocidos como modelos TRI binarios unidimensionales, de los cuales existen muchos tipos, según la función de enlace adoptada para configurar la curva característica del ítem (CCI) que contempla cada modelo. La función considerada en este trabajo es el enlace logit, el cual permite definir formalmente los modelos logísticos de 2 parámetros y sus casos particulares: el modelo logístico de 1 parámetro y el modelo de Rasch. Además, se realiza la correspondencia entre los coeficientes de regresión del MRLBU y los parámetros de discriminación y dificultad que caracterizan los modelos logísticos de la TRI. Finalmente, se construye la CCI del modelo logístico de 3 parámetros y se presentan las componentes de los modelos lineales generalizados que lo definen.

Referencias

[1] D.J. Bartholomew, F. Steele, I. Moustaki, J.I. Galbraith, *Analysis of Multivariate Social Science Data*, Second edition, Boca Raton: Taylor & Francis, 2008.

[2] A. Birnbaum, *Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability*, en: Statistical Theories of Mental Scores. Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.

[3] N. Cortada de Kohan, *Teoría de respuesta al ítem: supuestos básicos*. Revista Evaluar **4** (2004), no. 1, 95–110. https://doi.org/10.35670/1667-4545.v4.n1.600

[4] R. K. Hambleton, H. Swaminathan, *Item Response Theory: Principles and Applications*. Boston: Kluwer, 1985.

[5] F. Lord, *Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1980.
[6] J. Muñiz, *Introducción a la Teoría de Respuesta a los Ítems*, Madrid: Pirámide, 1997.
[7] J. Muñiz, R. K. Hambleton, *Medio siglo de teoría de respuesta a los ítems*. Anuario de Psicología, no. 52 (1992), 41–66. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2945369
[8] V. Ponsoda, J. Olea, J. Revuelta, *Teoría de la respuesta al ítem*. Psicometría I. Tema VI. Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Madrid, 1998.
[9] G. Rasch, *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhague: Danish Institute for Educational Research, 1960.

(J. M. Roldan) UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, URUGUAY 151, SANTA ROSA, LA PAMPA, ARGENTINA
Email address: `janiroldan15@gmail.com`

(M. C. Martín) UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, AV. ALEM 1253, BAHÍA BLANCA, BUENOS AIRES, ARGENTINA
Email address: `maritamartin11@gmail.com`